GEOMETRÍA ANALÍTICA

René Jiménez

PEARSON

Prentice Hall

GEOMETRÍA ANALÍTICA

GEOMETRÍA ANALÍTICA

René Jiménez

REVISIÓN TÉCNICA

Profr. David Simón Contreras Rivas
Asesor Académico del Área de Matemáticas
de la Dirección General del Colegio de Bachilleres

PEARSON
Educación ®

México • Argentina • Brasil • Colombia • Costa Rica • Chile • Ecuador
España • Guatemala • Panamá • Perú • Puerto Rico • Uruguay • Venezuela

Datos de catalogación bibliográfica

JIMÉNEZ, RENÉ

Geometría analítica

PEARSON EDUCACIÓN, México, 2006

ISBN: 970-26-0709-4
Área: Bachillerato

Formato: 18.5 × 23.5 cm Páginas: 192

Editor: Luis Rojo Dueñas
Correo-e: luis.rojo@pearsoned.com
Editora de desarrollo: Esthela González Guerrero
Supervisor de producción: José D. Hernández Garduño

PRIMERA EDICIÓN, 2006

Cámara Nacional de la Industria Editorial Mexicana. Reg. Núm. 1031

ISBN 970-26-0709-4

Impreso en México. Printed in México.

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 – 09 08 07 06

PEARSON
Educación ®

Contenido

Introducción

Los temas de esta obra constituyen un curso de geometría analítica plana elemental para estudiantes y maestros del nivel medio superior. Esta obra se ha estructurado de manera sencilla, pero elocuente, con el propósito de facilitar el quehacer docente y la tarea de los alumnos.

En su preparación se ha hecho el esfuerzo de satisfacer principalmente las necesidades del bachillerato general, con la esperanza de que sea una herramienta de apoyo para los profesores que enseñan en este nivel –de manera que haga más eficiente su labor– y de que le sirva de estímulo al estudiante para que participe de manera activa en el proceso de enseñanza-aprendizaje.

El material comprende un gran número de ejercicios teórico-prácticos, además de incluir los espacios necesarios para resolverlos a manera de cuaderno de trabajo.

Como en la mayoría de los cursos de Geometría analítica, este material aborda los temas básicos, como son: *el sistema de ejes coordenados, los lugares geométricos, la línea recta, la circunferencia, la parábola y, de manera general, las cónicas y la ecuación general de segundo grado*. La exposición teórica de dichos temas ha sido simplificada dentro de lo posible para una mejor comprensión por parte de los estudiantes, pero cuidando el desarrollo matemático elemental de los conceptos y la mayoría de las demostraciones.

Quiero agradecer a todas aquellas personas que me animaron e hicieron posible la realización de este trabajo, a mis compañeros maestros por permitirme compartirlo con ellos, ya que con sus comentarios y observaciones han enriquecido las estrategias didácticas que presento. En especial, agradezco a mis estudiantes, pues es a ellos a quienes va dirigida la parte fundamental de nuestra labor y son finalmente el motivo de nuestra vocación educativa.

Por último, a quienes dediquen un poco de su tiempo a la lectura y reflexión de este trabajo, mi más sincero agradecimiento, ya que fue escrito teniéndolos presentes.

René Jiménez

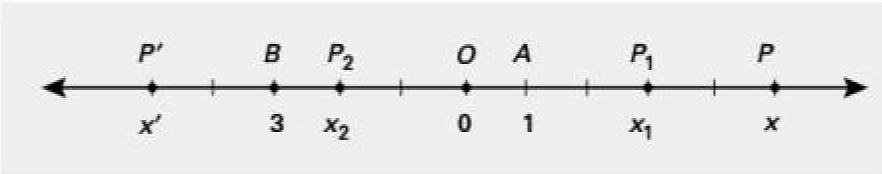
UNIDAD

1

SISTEMA COORDENADO LINEAL Y GRÁFICAS DE UNA ECUACIÓN

SISTEMA COORDENADO LINEAL

Observa la figura siguiente:

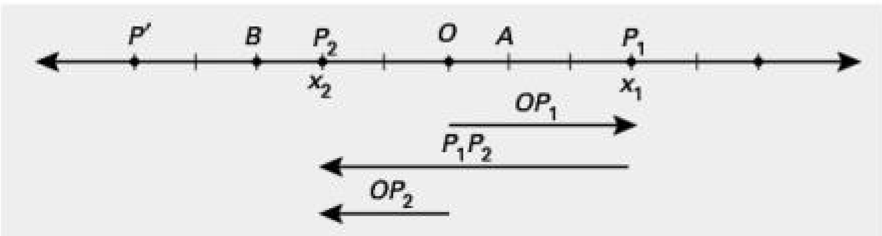


Si las letras mayúsculas describen puntos geométricos de la recta y las letras minúsculas, como x, representan números reales, ¿qué podemos deducir al respecto? Que hay una relación única entre un punto geométrico y un número real. Esta relación se llama *sistema coordenado lineal*.

También observamos que, por relación de segmentos dirigidos,

$$OP_1 + P_1P_2 = OP_2; \quad \text{pero} \quad OP_1 = x_1 \quad \text{y} \quad OP_2 = x_2, \quad \text{luego} \quad x_1 + P_1P_2 = x_2,$$

de donde $\boxed{P_1P_2 = x_2 - x_1}$

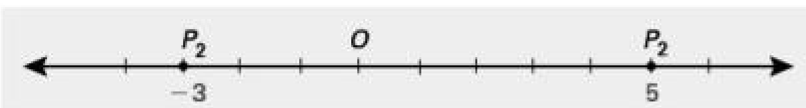


En cualquier caso, la longitud de un segmento dirigido se obtiene en magnitud y signo restando la coordenada del origen de la coordenada del extremo. Por lo tanto, la distancia entre P_1 y P_2 se obtiene fácilmente con tan sólo considerar el valor absoluto del segmento:

$$d = |P_1P_2| = |x_2 - x_1|$$

EJEMPLO Hallar la distancia entre los puntos $P_1(5)$ y $P_2(-3)$.

SOLUCIÓN $d = |-3 \; -5| = |-8| = 8$

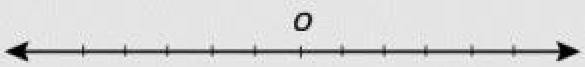


Ejercicio 1

Calcula la distancia entre los puntos $A(8)$ y $B(5)$. Verifica tu resultado con una recta numérica. Reflexiona la diferencia entre distancia y segmento dirigido.

Ejercicio 2

Calcula la distancia entre los puntos $C(-4)$, y $D(3)$.
Verifica tu resultado con una recta numérica.



SISTEMA COORDENADO EN EL PLANO

(René Descartes, 1596-1650)

Para extender la utilidad de la correspondencia entre puntos geométricos y números reales, vamos a considerar ahora un punto que puede moverse en todas direcciones, manteniéndose siempre en un plano. La consecuencia es el *sistema coordenado rectangular* o *cartesiano,* llamado así en honor de su descubridor, *René Descartes,* quien prácticamente es conocido por todos nosotros.

Su logro más notable fue la reducción de la naturaleza a leyes matemáticas. Al respecto, Descartes afirmaba:

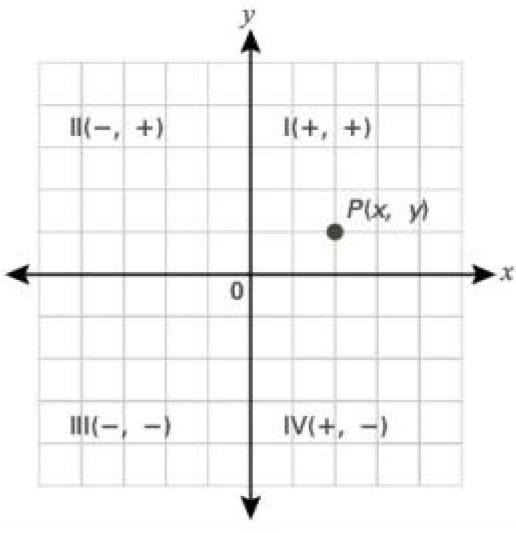
> Consideraría que no sé nada de física si tan sólo fuese capaz de expresar cómo deben ser las cosas, pero fuese incapaz de demostrar que no pueden ser de otra manera. No obstante, habiendo logrado reducir la física a las matemáticas, la demostración es entonces posible, y pienso que puedo realizarla con el reducido alcance de mi conocimiento.

A continuación se muestran los elementos que componen este sistema:

$P(x, y)$ es un punto geométrico, donde (x, y) representan un par de números reales.

x se llama abscisa y y se llama ordenada; juntas se conocen como coordenadas.

I, II, III y IV se llaman cuadrantes y definen los signos de las coordenadas.



Escribe con tus propias palabras un concepto de coordenadas cartesianas.

____

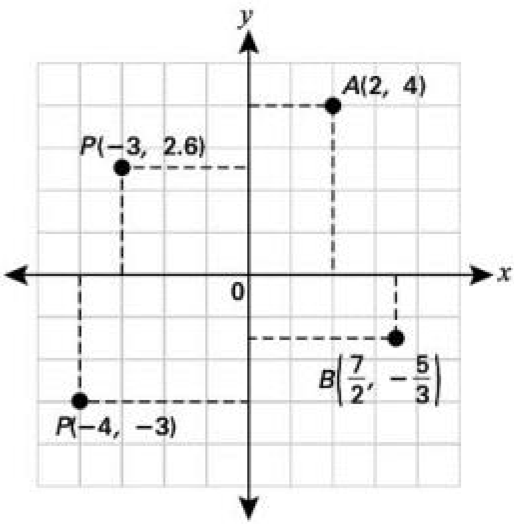
____

____

____

____

EJEMPLO 1 Localizar los puntos $A(2,4)$, $B\left(\frac{7}{2}, -\frac{5}{3}\right)$, $P(-4,-3)$ y $P(-3, 2.6)$.

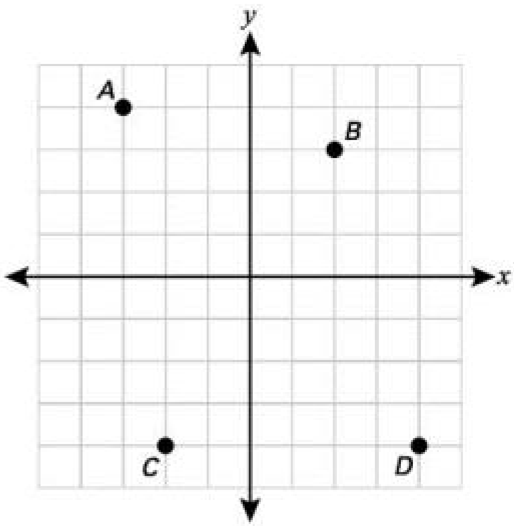


SOLUCIÓN

En cada eje ubicamos la coordenada respectiva.

Trazamos, a partir de ellas, segmentos paralelos a los ejes; en su intersección se encuentra el punto buscado.

EJEMPLO 2 Escribir las coordenadas que corresponden a cada punto de la gráfica de referencia.



SOLUCIÓN

A(−3, 4)

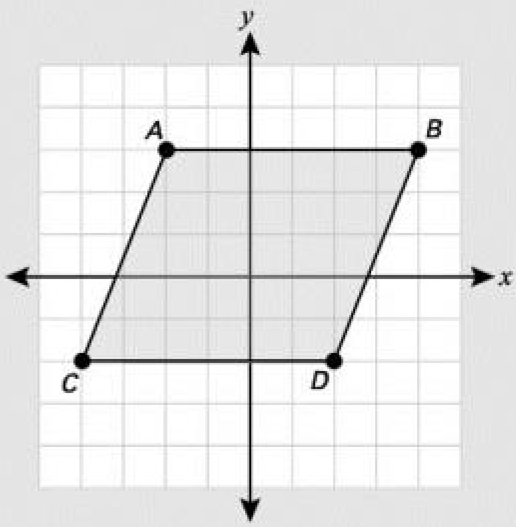
B(2, 3)

C(−2, −4)

D(4, −4)

EJERCICIO 1

Encuentra las coordenadas de los vértices **A**, **B**, **C** y **D** de la figura que se presenta a continuación:

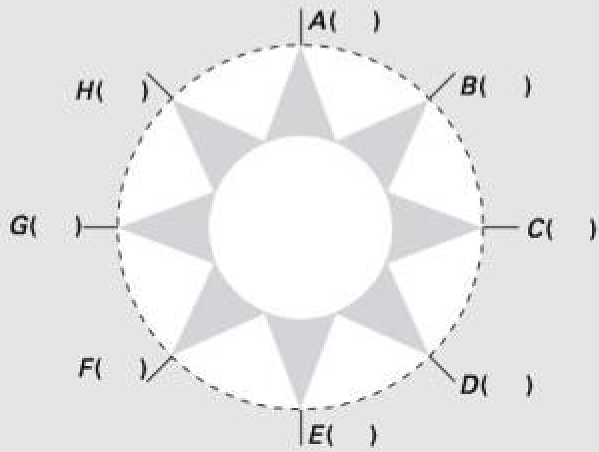


Ejercicio 2

Si, en la estrella mostrada, la distancia en línea recta de una punta a otra es de 30 cm, ¿cuáles son las coordenadas de los vértices de esta figura? Por ejemplo: las coordenadas del vértice B son

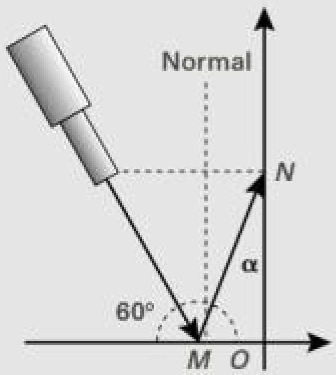
$$x = 15 \cos 45° = 15\left(\frac{2}{\sqrt{2}}\right) = \frac{15}{\sqrt{2}}$$

$$y = 15 \operatorname{sen} 45° = 15\left(\frac{2}{\sqrt{2}}\right) = \frac{15}{\sqrt{2}}$$



Ejercicio 3

Un rayo incide sobre una superficie como se indica en la figura, ¿cuáles son las coordenadas del punto **M** y **N**? La distancia MO = 20 y, de acuerdo con la ley fundamental de reflexión, $\alpha = 60°$.

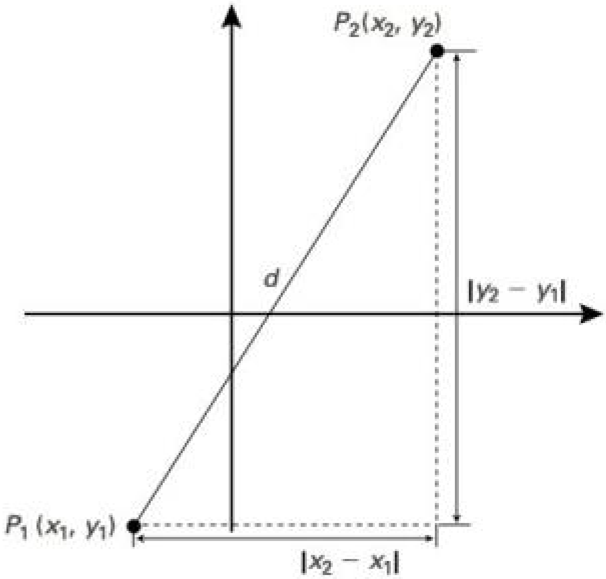


Ley de reflexión: La experiencia demuestra que $\alpha = 60°$. El rayo incidente, el rayo reflejado y la normal yacen en el mismo plano.

DISTANCIA ENTRE DOS PUNTOS EN EL PLANO

En un sistema coordenado bidimensional, la distancia entre dos puntos $P_1\,P_2$ es fácil de obtener con tan sólo hacer uso del *teorema de Pitágoras*.

Si observamos la siguiente figura



tenemos que

$$d^2 = |P_1P_2|^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

luego,

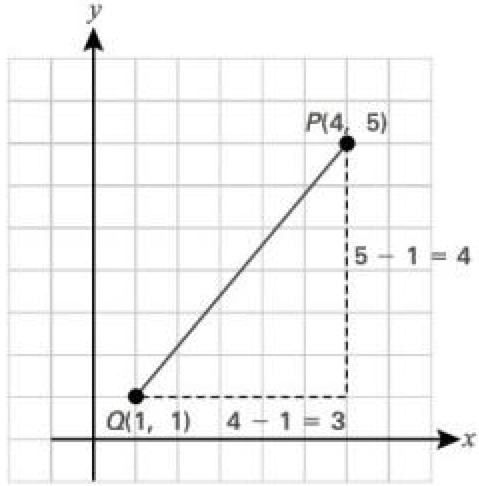
$$\boxed{d = |P_1P_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}}$$

que es la expresión que sirve para calcular la distancia entre dos puntos.

EJEMPLO 1 Encontrar la distancia entre los puntos $P(4,5)$ y $Q(1,1)$.

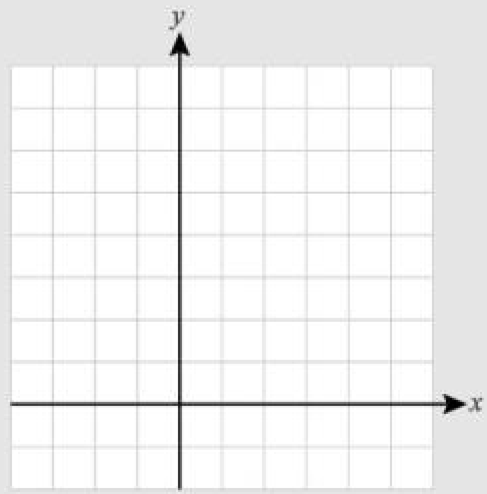
SOLUCIÓN

$$\begin{aligned} d = |PQ| &= \sqrt{(1-4)^2 + (1-5)^2} \\ &= \sqrt{(-3)^2 + (-4)^2} \\ &= \sqrt{9+16} \\ &= \sqrt{25} \\ &= 5 \end{aligned}$$

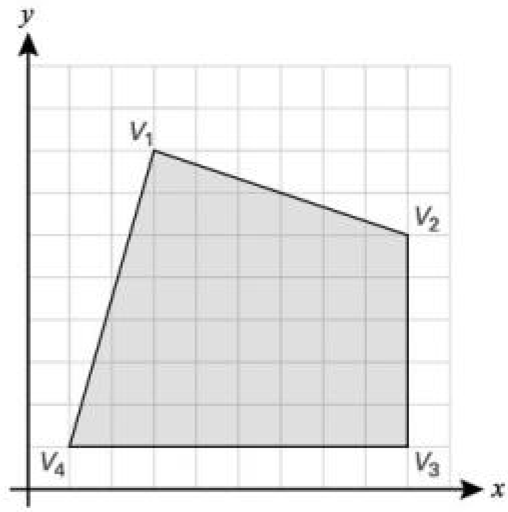


EJERCICIO 1

Halla la distancia entre los puntos $A(-3,\ -2)$ y $B(3,5)$.



EJEMPLO 2 Calcular el perímetro y el área de un terreno que tiene las características del siguiente polígono.



SOLUCIÓN

Las coordenadas de los vértices son:

$$V_1(4,10), V_2(12,8), V_3(12,1) \text{ y } V_4(1,1)$$

La longitud de cada lado es:

$$|V_1V_2| = \sqrt{(12-4)^2 + (8-10)^2} = \sqrt{68} \approx 8.24$$

$$|V_2V_3| = \sqrt{(12-12)^2 + (1-8)^2} = \sqrt{49} \approx 7$$

$$|V_3V_4| = \sqrt{(1-12)^2 + (1-1)^2} = \sqrt{121} \approx 11$$

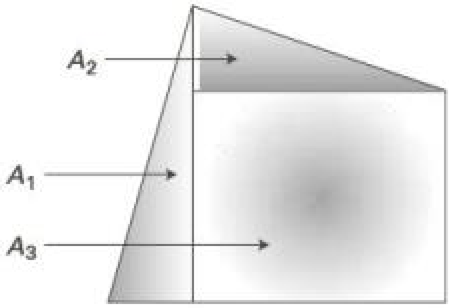
$$|V_1V_4| = \sqrt{(1-4)^2 + (1-10)^2} = \sqrt{90} \approx 9.48$$

El perímetro es la suma de estas longitudes: $\sqrt{68} + 7 + 11 + \sqrt{90} \approx 35.72$

El área del polígono es la suma de las áreas de dos triángulos rectángulos y un rectángulo.

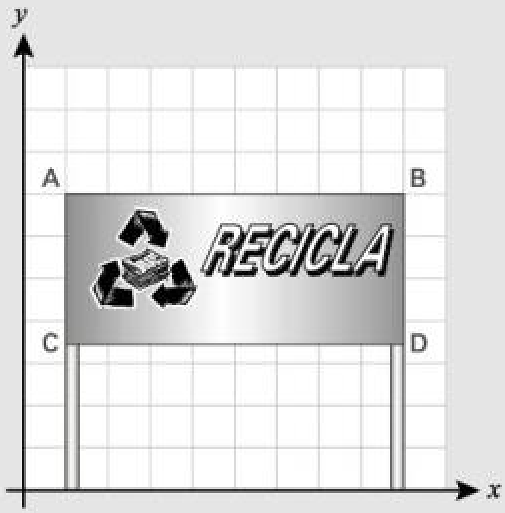
$$A_1 = \frac{3 \times 9}{2} = 13.5, \quad A_2 = \frac{8 \times 2}{2} = 8 \quad \text{y} \quad A_3 = 8 \times 7 = 56$$

El área total es $13.5 + 8 + 56 = 77.5$.



EJERCICIO 2

En la figura se muestra un anuncio para promover la conciencia ecológica. El eje x representa el nivel del piso y la escala es 1:200 cm.



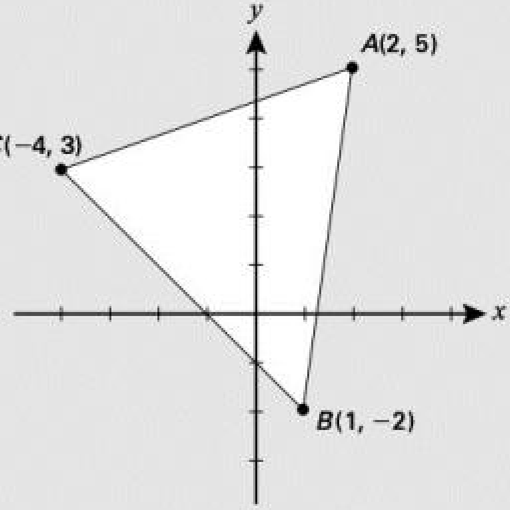
a) ¿Qué dimensiones tiene el anuncio?

b) ¿A qué altura queda del piso su parte inferior?

c) ¿Cuánto mide la diagonal AD?

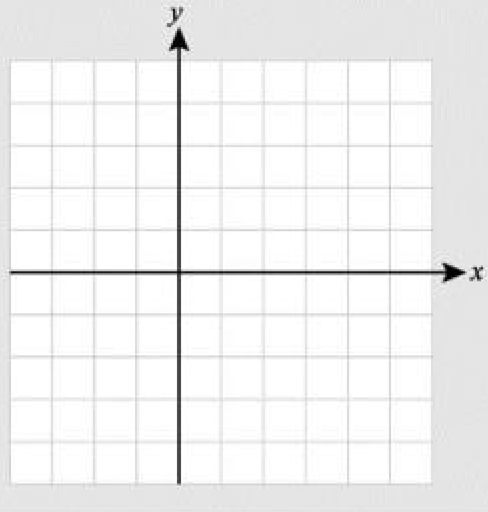
EJERCICIO 3

El triángulo mostrado aparenta ser isósceles. Demuestra que efectivamente lo es, calculando la longitud de sus lados.



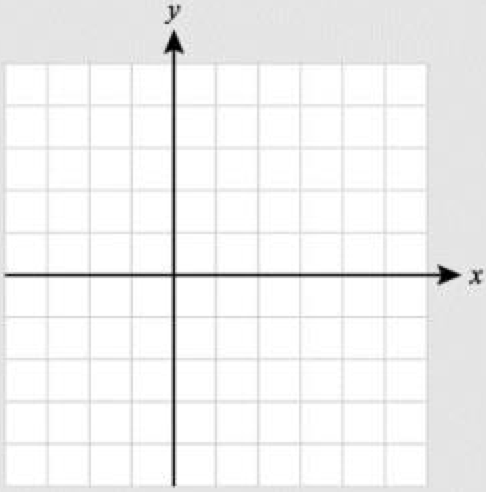
EJERCICIO 4

Prueba que los puntos $P(-3, \sqrt{3})$, $Q(1, -3\sqrt{3})$, y $R(5, \sqrt{3})$ son los vértices de un triángulo equilátero.



EJERCICIO 5

Prueba que los puntos $A(-1, -4)$, $B(3, 1)$ y $C(-2, 5)$ son los vértices de un triángulo rectángulo e isósceles.

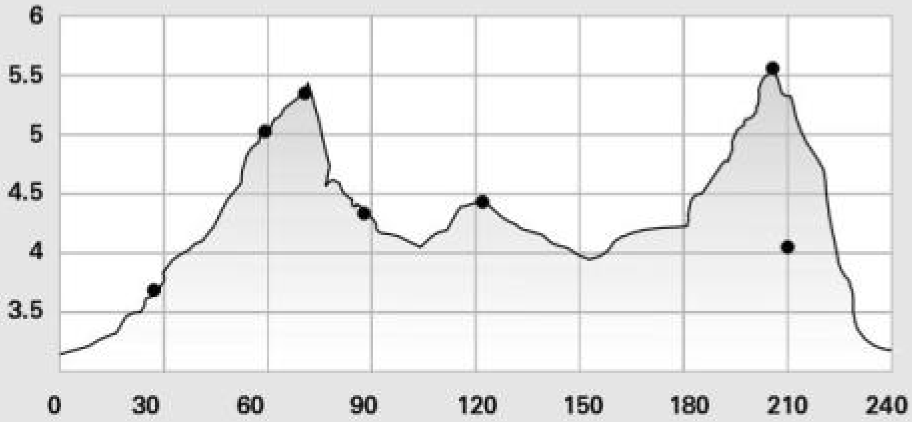


EJERCICIO 6

En el mapa mostrado, calcula las distancias en línea recta entre Guamúchil, Culiacán y Las Puente; y demuestra que estas tres localidades están en los vértices de un triángulo rectángulo. Las coordenadas respectivas son $G(6.5, 20.5)$, $C(11.5, 13)$ y $L(8.5, 11)$.

EJERCICIO 7

La gráfica y la tabla indican la altura en km de algunas de las mayores cumbres de México. Las distancias en el eje x son con respecto a la Ciudad de México.



Elevación	Altura
Pico de Orizaba	5.747
Popocatépetl	5.482
Iztaccíhuatl	5.386
Nev. de Toluca	4.558
La Malinche	4.461
Cofre de Perote	4.282
Pico del Ajusco	3.929

a) Escribe la coordenada de cada cima.

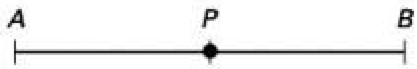
b) ¿Cuál es la distancia que hay entre el volcán Popocatépetl y el Pico de Orizaba?

DIVISIÓN DE UN SEGMENTO ENTRE UNA RAZÓN DADA

En matemáticas, cuando hablamos de razón queremos denotar que estamos comparando dos cantidades. Así, por ejemplo, la razón $\frac{3}{4} = 0.75$ nos dice cuántas veces contiene el numerador al denominador.

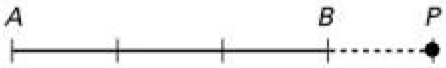
En geometría, describimos un punto P que divide un segmento AB en dos partes, tal que su razón es $r = \frac{AP}{PB}$.

$$r = \frac{AP}{PB} = \frac{1}{2}$$

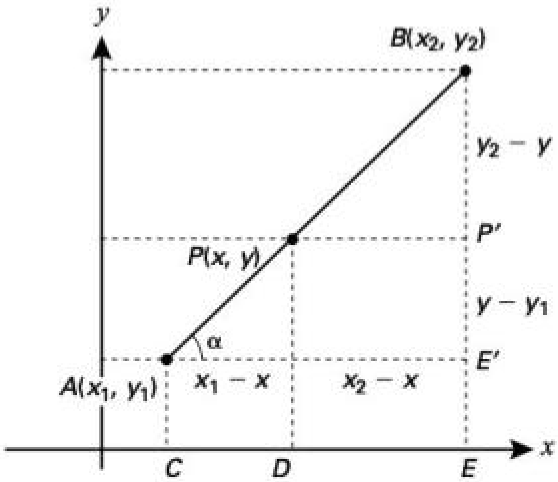


$$r = \frac{AP}{PB} = \frac{1}{1} = 1$$

En cada uno de los segmentos mostrados a continuación, escribe la razón del punto P en el segmento dirigido AB.



Ahora veamos cómo calcular las coordenadas de un punto $P(x, y)$ que divide a un segmento AB en un sistema bidimensional.



Observemos la figura de la izquierda y reflexionemos en el siguiente análisis:

$$\cos \alpha = \frac{CD}{AP} = \frac{DE}{PB},$$

al trasponer términos, obtenemos la razón:

$$r = \frac{AP}{PB} = \frac{CD}{DE} = \frac{x - x_1}{x_2 - x}.$$

De esta última expresión, despejamos x:

$$x = \frac{x_1 + rx_2}{1 + r}.$$

De manera análoga, podemos obtener la coordenada si trazamos perpendiculares al eje Y, esto es

$$y = \frac{y_1 + ry_2}{1 + r}.$$

Las coordenadas de un punto $P(x, y)$ que divide al segmento $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$ en la razón $r = \dfrac{AP}{PB}$ son:

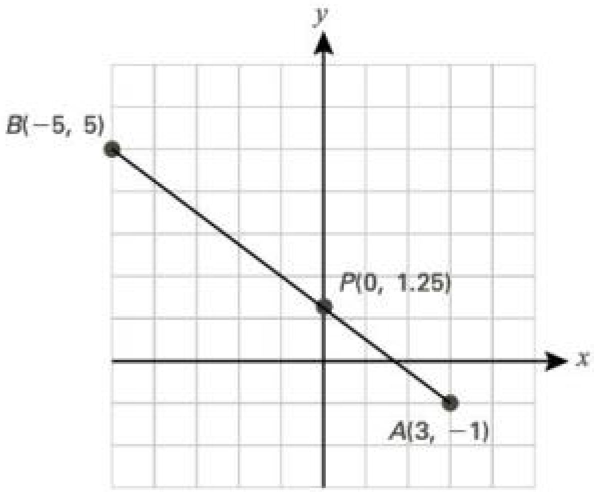
$$x = \frac{x_1 + rx_2}{1 + r} \quad \text{y} \quad y = \frac{y_1 + ry_2}{1 + r}, \text{ donde } r \neq -r.$$

N O T A S

1. En geometría analítica se debe considerar el signo de r, ya que tratamos con segmentos dirigidos.

2. Si el punto de división P es externo al segmento dirigido AB, entonces r es negativa (AP y PB tienen sentidos contrarios).

EJEMPLO 1 Obtener las coordenadas del punto que divide al segmento con extremos $A(3, -1)$ y $B(-5, 5)$ en la razón $r = \frac{3}{5}$.



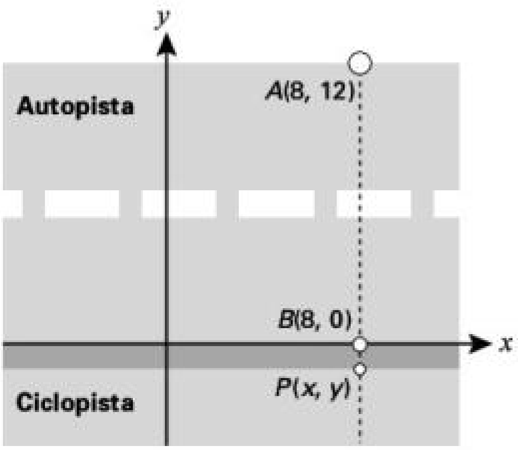
SOLUCIÓN

$$x = \frac{3 + \frac{3}{5}(-5)}{1 + \frac{3}{5}} = \frac{0}{\frac{8}{5}} = 0$$

$$y = \frac{-1 + \frac{3}{5}(5)}{1 + \frac{3}{5}} = \frac{2}{\frac{8}{5}} = \frac{10}{8} = 1.25$$

El punto de división se encuentra en $P(0, 1.25)$, como puede verse en la figura.

EJEMPLO 2 El ancho de la franja que separa una ciclopista de una autopista es igual a la mitad de un carril de ésta. Las coordenadas de los puntos están dadas en metros.



a) ¿Cuáles son las coordenadas de un ciclista en P?

b) ¿Cuál es el ancho de la franja de separación?

SOLUCIÓN

a) El punto de división P es externo al segmento AB

y la razón es: $r = \frac{AP}{PB} = -\frac{15}{3} = -\frac{5}{1} = -5.$

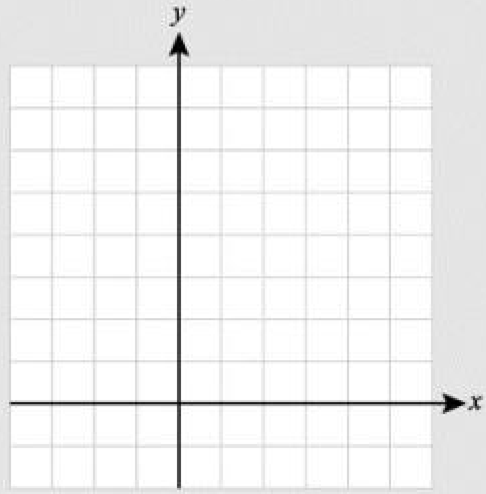
Las coordenadas de P son:

$$x = \frac{8 + (-5)8}{1 + (-5)} = 8 \quad \text{y} \quad y = \frac{12 + (-5)0}{1 + (-5)} = -3$$

b) $|PB| = |-3 - 0| = |-3| = 3$ metros.

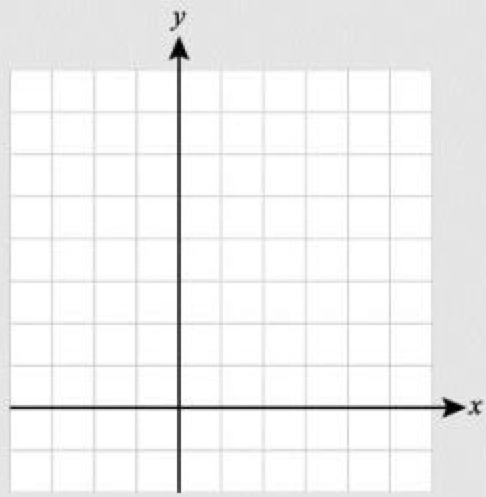
EJERCICIO 1

Halla las coordenadas del punto medio del segmento cuyos extremos son $A(4, -1)$ y $B(-3, 5)$ en la razón $r = \frac{2}{5}$.



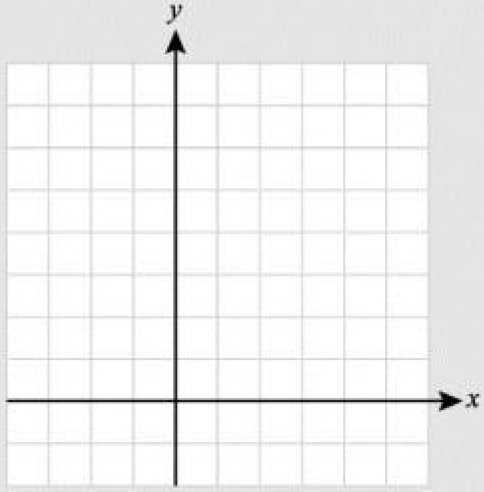
EJERCICIO 2

Si $P_1(-4, 3)$ y $(4, -3)$ son los extremos de un segmento dirigido P_1P_2, halla las coordenadas del punto $P(x, y)$, que divide a este segmento en la razón $r = -3$.



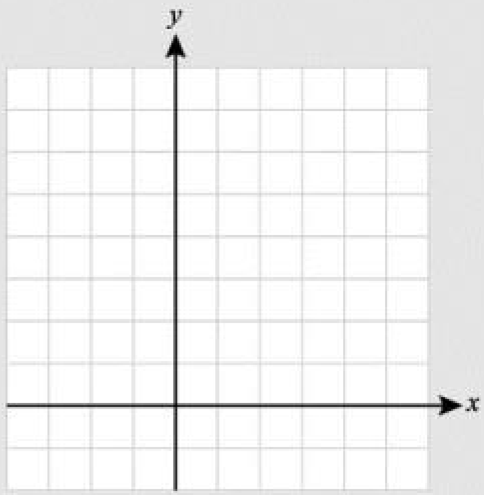
EJERCICIO 3

Encuentra los puntos de trisección del segmento dirigido cuyos extremos son los puntos $A(-2,3)$ y $B(6, -3)$.



EJERCICIO 4

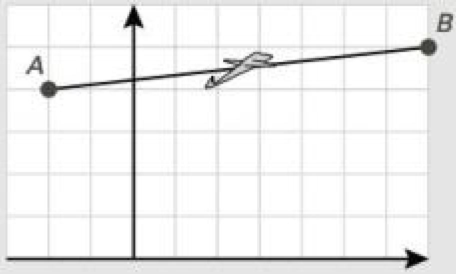
Los extremos de un segmento dirigido vienen dados por $A(7,4)$ y $B(-1, -4)$. Obtén la razón r en que el punto $P(1,-2)$ divide al segmento.



EJERCICIO 5

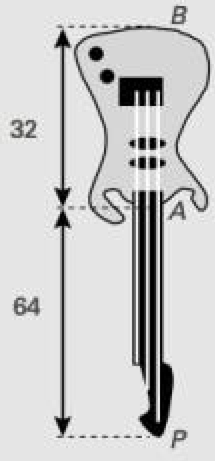
La posición de un avión que viaja en línea recta está a 250 km del punto de partida y a 350 del punto a donde debería llegar. ¿Cuáles son las coordenadas del sitio en el que se encuentra, si las coordenadas del punto de partida y de llegada son $A(-2, 4)$ y $B(8, 5)$?

La razón es $\frac{AP}{PB} = \frac{250}{350} = \frac{5}{7}$



EJERCICIO 6

Las longitudes del brazo y del cuerpo de una guitarra eléctrica son, respectivamente, 64 cm y 32 cm. Los extremos del cuerpo de la guitarra son $A(4, 5)$ y $B(4, 20)$. ¿Cuáles son las coordenadas del extremo final del brazo de la guitarra?



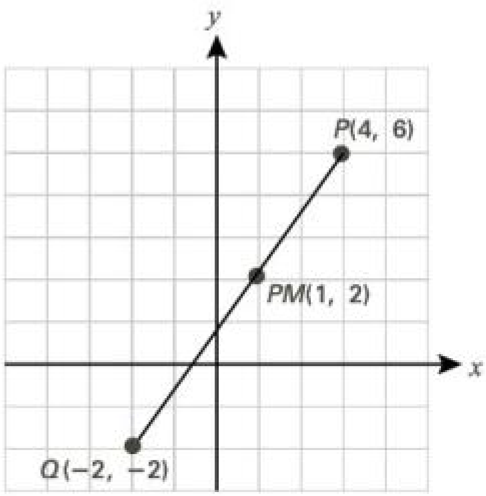
$r = \frac{64}{96} = -\frac{2}{3}$

PUNTO MEDIO

El punto medio de un segmento AB es el resultado de una razón $r = 1$, por lo tanto, las coordenadas anteriores se convierten en:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} \quad \text{y} \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

EJEMPLO 1 Halla las coordenadas del punto medio del segmento $P(4, 6)$ y $Q(-2, 2)$.

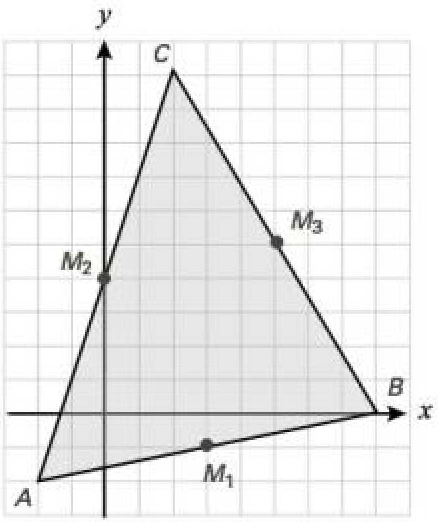


SOLUCIÓN

$$x = \frac{4 + (-2)}{2} = 1 \quad \text{y} \quad y = \frac{6 + (-2)}{2} = 2$$

El punto medio se localiza en $(1, 2)$.

EJEMPLO 2 Encuentra los puntos medios de los lados del triángulo con vértices $A(-2, -2)$, $B(8, 0)$ y $C(2, 10)$. Prueba que la distancia entre dos puntos medios es igual a la mitad de la distancia entre los vértices del lado restante.



SOLUCIÓN

Punto medio del lado AB:

$$x = \frac{-2 + 8}{2} = 3 \quad \text{y} \quad y = \frac{-2 + 0}{2} = -1;$$

entonces $M_1(3, -1)$.

Punto medio del lado AC:

$$x = \frac{-2 + 2}{2} = 0 \quad \text{y} \quad y = \frac{-2 + 10}{2} = 4;$$

entonces $M_2(0, 4)$.

Punto medio del lado BC:

$$x = \frac{8 + 2}{2} = 5 \quad \text{y} \quad y = \frac{0 + 10}{2} = 5;$$

entonces $M_3(5, 5)$.

Ahora calculemos las distancias $|AB|$ y $|M_2M_3|$:

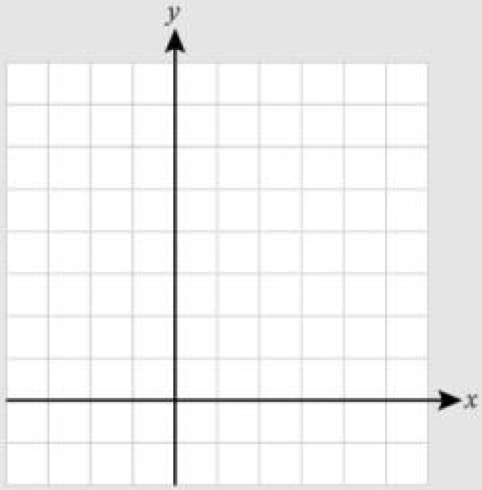
$$|AB| = \sqrt{(8 + 2)^2 + (0 + 2)^2} = \sqrt{104} = 2\sqrt{26}$$

$$|M_2M_3| = \sqrt{(5 - 0)^2 + (5 - 4)^2} = \sqrt{26}$$

que es lo que queríamos comprobar.

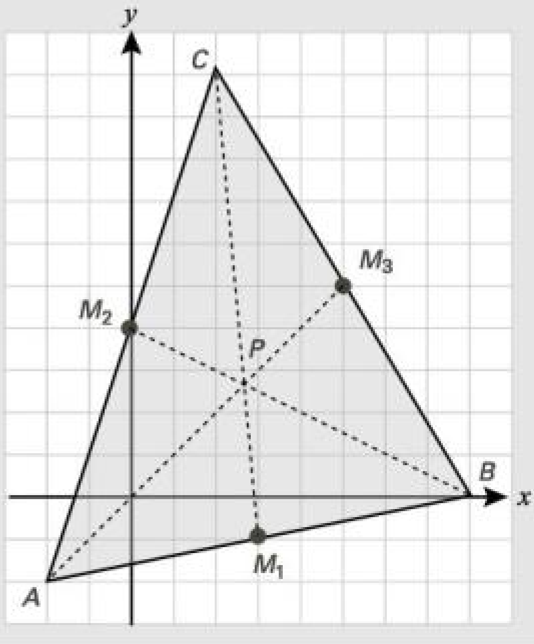
Ejercicio 1

Halla las coordenadas del punto medio del segmento determinado por los puntos $A(-3, -2)$ y $B(4, 5)$.



Ejercicio 2

Calcula las coordenadas del punto $P(x, y)$, que divide en 3 partes iguales a los segmentos que unen a los vértices con puntos medios de cada lado opuesto el triángulo que vimos en el ejemplo 2 ($r = 2$).



ÁNGULO DE INCLINACIÓN Y PENDIENTE DE UNA RECTA

PENDIENTE DE UNA RECTA

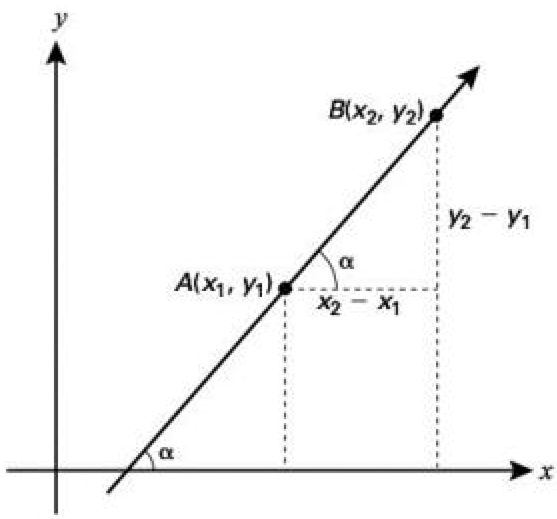
Se llama pendiente m o coeficiente angular de una recta a la tangente de su ángulo de inclinación α.

Entonces, en la figura es evidente que

$$m = \tan \alpha$$

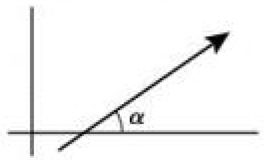
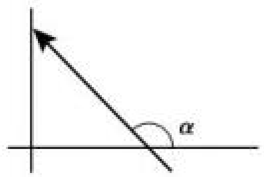
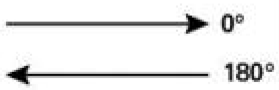
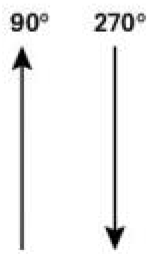
Luego, si consideramos dos puntos cualesquiera de la recta, por ejemplo A y B:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$



Es importante destacar que $y_2 - y_1$ es un cambio de distancia vertical y que $x_2 - x_1$ es un cambio de distancia horizontal, por lo cual, la pendiente m es una *razón de cambio*.

Otro aspecto importante de trigonometría que se debe recordar nos lo sugiere la siguiente tabla:

RECTA	ÁNGULO	PENDIENTE
	$\alpha < 90°$	$m = \tan \alpha$ es positiva
	$\alpha < 90°$	$m = \tan \alpha$ es negativa
	$\alpha = 0°$ o $180°$	$m = \tan \alpha$ es igual a 0
	$\alpha = 90°$ o $270°$	$m = \tan \alpha$ no está definida

EJEMPLO 1 Obtener en cada caso lo siguiente:

a) La pendiente de la recta con un ángulo de inclinación $\alpha = 120°$

SOLUCIÓN

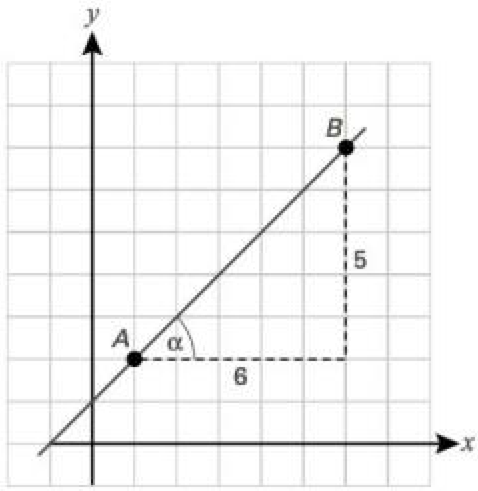
$$m = \tan \alpha = \sqrt{3} \approx -1.7320$$

b) El ángulo de inclinación de la recta con $m = 1$

SOLUCIÓN

$$\alpha = 45°$$

EJEMPLO 2 Hallar la pendiente y el ángulo de inclinación de la recta que pasa por $A(1, 2)$ y $B(7, 7)$.

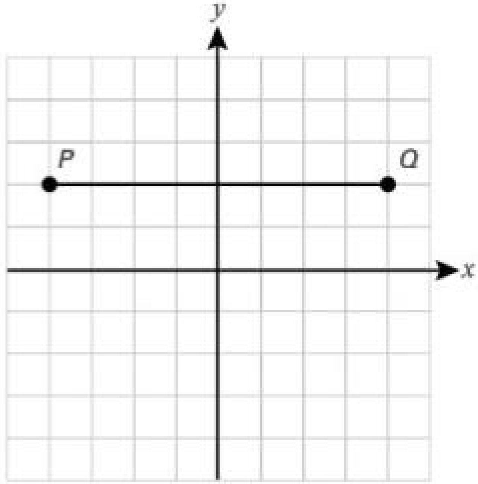


SOLUCIÓN

$$m = \frac{7 - 2}{7 - 1} = \frac{5}{6}.$$

$$\tan \alpha = \frac{5}{6} = 0.83333 \Rightarrow \alpha = 39.80°.$$

EJEMPLO 3 Encontrar la pendiente y el ángulo de inclinación de la recta que pasa por $P(-5, 2)$ y $Q(4, 2)$.

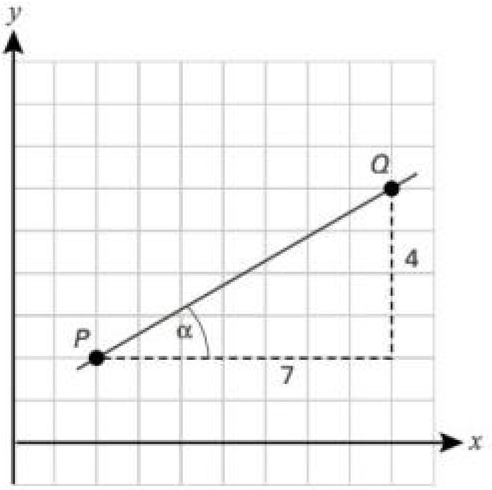


SOLUCIÓN

$$m = \frac{2 - 2}{4 - (-5)} = \frac{0}{9} = 0$$

$$\tan \alpha = 0 \Rightarrow \alpha = 0°$$

EJEMPLO 4 Hallar la gráfica de la recta que pasa por $P(3, 2)$ y tiene pendiente $m = \frac{4}{7}$.

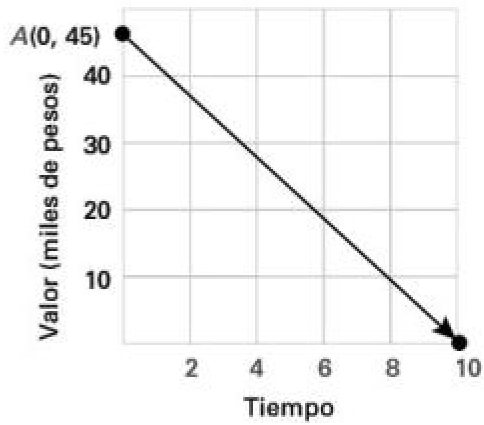


SOLUCIÓN

Se grafica el punto conocido y, a partir de éste, se cuentan siete unidades paralelas a x y cuatro paralelas a y; la intersección de estas coordenadas es otro punto de la recta.

EJEMPLO 5

Algunos equipos se deprecian de acuerdo con un modelo lineal. La gráfica nos muestra una depreciación constante anual de un equipo médico que perderá todo su valor al cabo de cierto tiempo. En función de la gráfica,



a) ¿Cuál es el precio inicial del equipo?

b) ¿En cuánto tiempo perderá todo su valor?

c) ¿Cuánto valdrá el equipo en 7 años?

SOLUCIÓN

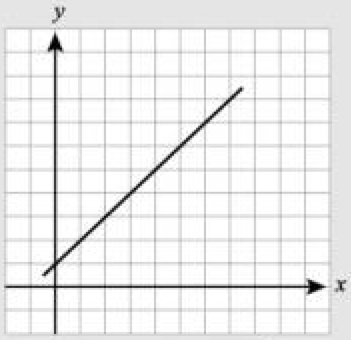
a) El precio inicial es de \$ 45,000.

b) El punto $B(10, 0)$ nos muestra esta situación, dentro de 10 años.

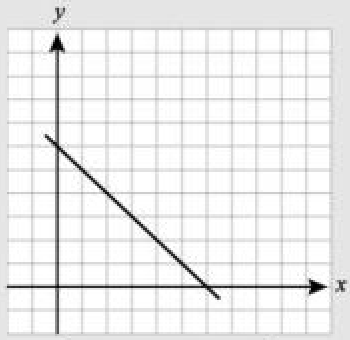
c) $m = \dfrac{45 - 0}{0 - 10} = -\dfrac{45}{10} = -\dfrac{4.5}{1}$, lo que indica que cada año el equipo vale \$4,500 pesos menos, de modo que en 7 años el equipo valdrá \$45,000 − 7(\$4,500) = \$13,500.

Ejercicio 1

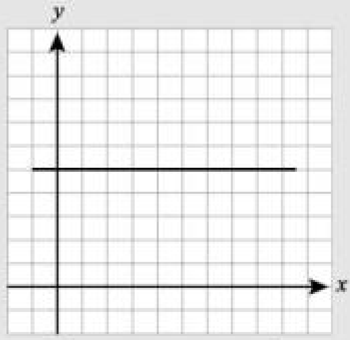
En cada una de las gráficas que se presentan a continuación, escribe la pendiente de la recta que se muestra e interpreta la pendiente mediante una relación entre desplazamientos vertical/horizontal.



$m =$



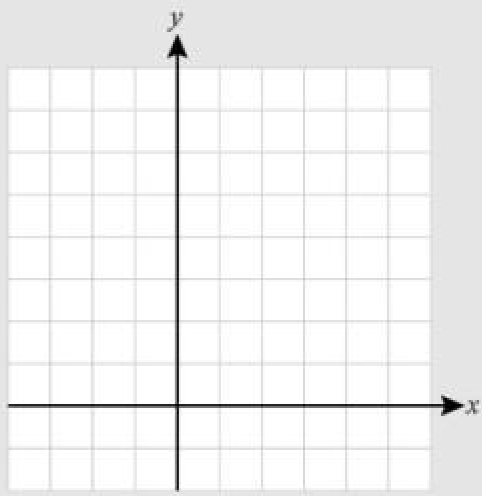
$m =$



$m =$

Ejercicio 2

Calcula el valor de la pendiente y el ángulo de inclinación de la recta que pasa por los puntos $A(-3, 2)$ y $B(1, 1)$.



EJERCICIO 3

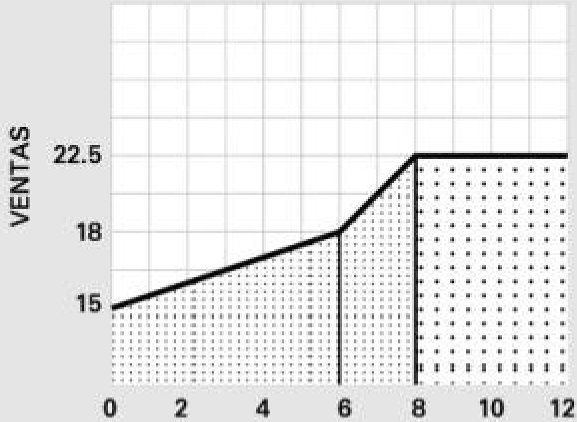
En un plano cartesiano, dibuja la recta que pasa por $P(4,\ -3)$ y tiene la pendiente $m = -\frac{2}{5}$.

EJERCICIO 4

Usando el concepto de pendiente, prueba que los puntos $A(-1,\ -1)$, $B(3, 7)$ y $C(1, 3)$ son colineales.

Ejercicio 5

La gráfica muestra las ventas mensuales de un almacén antes, durante y después del periodo de ofertas en julio-agosto. ¿Cuál fue el ritmo del incremento de ventas en cada periodo?



Ejercicio 6

La Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM) contaba, en 1970, con nueve planteles de bachillerato. Para 1973, el total de planteles que pertenecían a la UNAM ascendía a 14 y, en 2000, esta cantidad de planteles se mantuvo constante. ¿Cuál fue la razón promedio de crecimiento anual de planteles de bachillerato en cada uno de esos dos periodos?

EJERCICIO 7

Una maquinaria para asfaltar carreteras se deprecia de manera constante a razón de \$35,000 por año. Si el valor de desecho de dicho equipo está contemplado en \$1,200, al cabo de 25 años, ¿cuál fue el valor inicial del equipo?

Ejercicio 8

La tabla y la gráfica muestran las exportaciones de México en 1999.

Mes	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Millones de dólares	8728	9652	9675	10598	11102	12000	10231	12322	11740	12303	13089	13500

a) ¿Cuál fue la tasa de exportación promedio anual de México en ese año?

b) ¿En cuál trimestre del año fue mayor el ritmo de exportación?

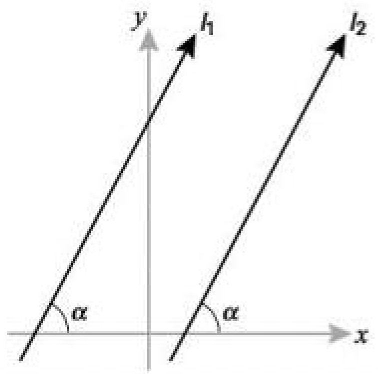
PARALELISMO Y PERPENDICULARIDAD

Condición de paralelismo

Dos rectas, l_1 y l_2, son paralelas si y sólo si sus pendientes son iguales:

$$m_1 = m_2$$

En la figura, $\tan \alpha = \tan \alpha$; por lo tanto, $m_1 = m_2$.

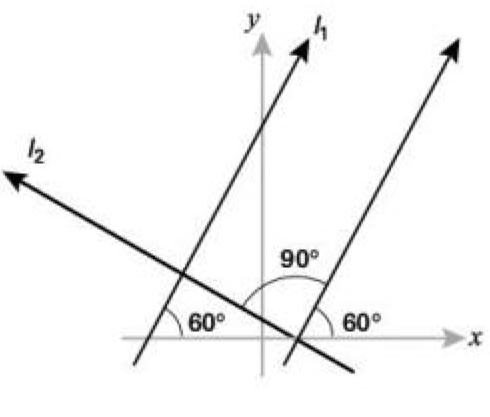


Condición de perpendicularidad

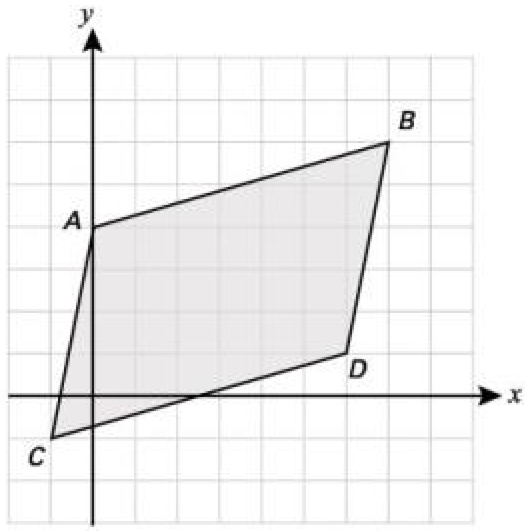
Dos rectas l_1 y l_2 son perpendiculares si y sólo si sus pendientes son recíprocas y de signo contrario; es decir, su producto es igual a -1.

$$m_1 m_2 = -1, \quad \text{o bien} \quad m_1 = -\frac{1}{m_2}.$$

En la figura, $(\tan 60°)(\tan 150°) = (\sqrt{3})\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -1$



EJEMPLO 1 Probar que los puntos $A(-2, 4)$, $B(5, 6)$, $C(-3,\ -1)$ y $D(4, 1)$ son vértices de un paralelogramo.



SOLUCIÓN

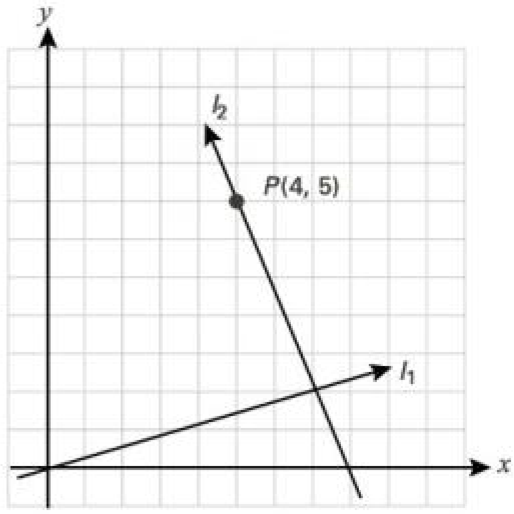
Calculemos las pendientes de sus lados; si son iguales de dos en dos, es un paralelogramo.

$$m_{AB} = \frac{6-4}{5-(-2)} = \frac{2}{7} \qquad m_{CD} = \frac{1-(-1)}{4-(-3)} = \frac{2}{7}$$

$$m_{AC} = \frac{-1-4}{-3-(-2)} = \frac{-5}{-1} = 5 \qquad m_{BD} = \frac{1-6}{4-5} = \frac{-5}{-1} = 5$$

Esto prueba que es un paralelogramo.

EJEMPLO 2 La recta l_1, mostrada en la figura, tiene pendiente $m_1 = \frac{2}{5}$.



a) Entonces, la pendiente de la recta perpendicular l_2.

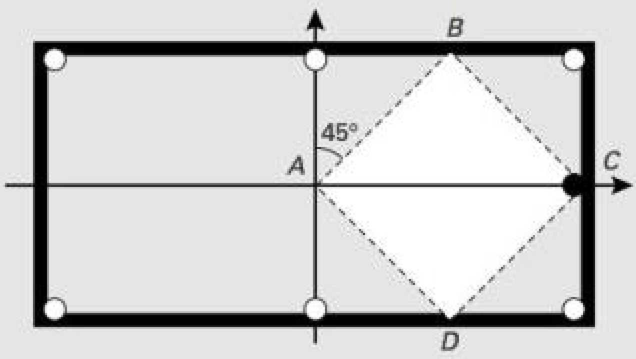
SOLUCIÓN

$$m_2 = -\frac{5}{2}$$

b) Dibujar la recta l_2 que pasa por $P(4, 5)$.

EJERCICIO 1

La figura muestra la trayectoria de una bola de billar. Encuentra las coordenadas de C y D, así como las pendientes de cada línea punteada si la mesa mide 10 por 20.



Ejercicio 2

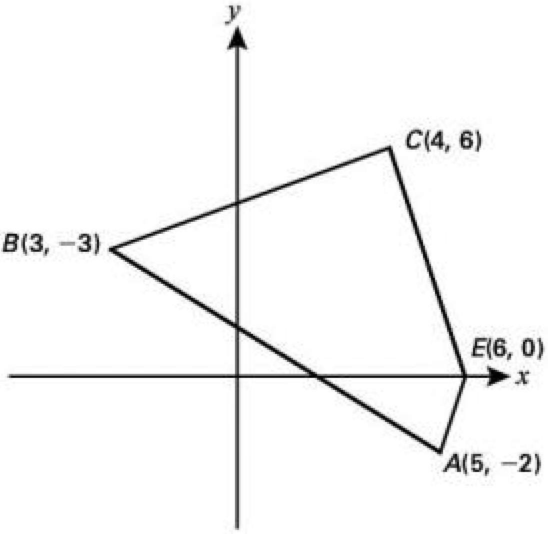
Halla, en la figura del ejercicio anterior, el punto medio de cada lado del triángulo con vértices $A(-5,4)$, $B(3,6)$ y $C(2,-2)$. Prueba que la línea que pasa por dos puntos medios es paralela al lado restante.

ÁREA DE UN POLÍGONO

El área de un polígono de vértices $P_1(x_1,y_1), P_2(x_2,y_2), \ldots, P_n(x_n,y_n)$ puede calcularse mediante la fórmula:

$$A = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ x_n & y_n \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix} = \frac{x_1 y_2 + x_2 y_3 + \cdots + x_n y_1 - (x_2 y_1 + x_3 y_2 + \cdots + x_1 y_n)}{2}$$

EJEMPLO 3 Obtener el área del polígono con vértices $A(5,\ -2)$, $B(-3, 3)$, $C(4, 6)$ y $E(6, 0)$.



$$A = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 5 & -2 \\ -3 & 3 \\ 4 & 6 \\ 5 & 0 \\ 6 & -2 \end{vmatrix} = \left|\frac{(5)(3) + (-3)(6) + (4)(0) + (6)(-2) - [(-3)(-2) + (4)(3) + (6)(6) + (5)(0)]}{2}\right|$$

$$A = \left|\frac{15 - 18 + 0 - 12 - (6 + 12 + 36 + 0)}{2}\right| = 34.5 \text{ unidades cuadradas.}$$

EJERCICIO 3

Utiliza el determinante para demostrar que los puntos $(1,5), (-2,\ -4)$, $(2,8)$ y $(0,2)$ son colineales.

EJERCICIO 4

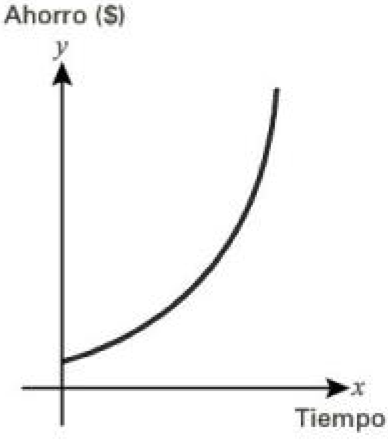
Determina el área del triángulo cuyos vértices son $A(-2,\ -2)$, $B(1,3)$ y $C(4,\ -5)$.

EJERCICIO 5

Determina el área del polígono cuyos vértices son $A(5,\ -2)$, $B(-3, 3)$, $C(-2, 5)$, $D(4, 6)$ y $E(6, 0)$.

GRÁFICAS DE UNA ECUACIÓN

LUGAR GEOMÉTRICO. GRÁFICA DE UNA ECUACIÓN



Con frecuencia, los diversos medios de comunicación nos permiten ver y analizar de manera gráfica situaciones en las que están involucradas al menos dos cantidades variables y la dependencia entre éstas, por ejemplo; la tasa de inflación, el crecimiento económico de un país, la producción mensual y las estadísticas de las ventas de una empresa, etc. Tales gráficas nos dan una idea geométrica y sencilla de cómo una cantidad depende de otra.

Otra manera de mostrar los resultados mencionados anteriormente es relacionar las dos cantidades en forma de una ecuación algebraica equivalente a una gráfica o lugar geométrico.

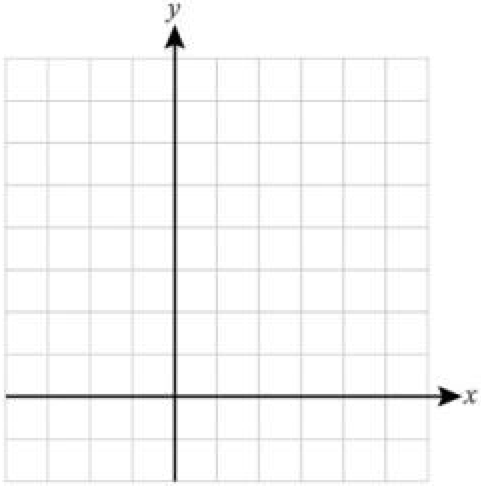
En esta parte del curso, vamos a introducir el procedimiento elemental para relacionar cantidades en forma de gráfica o en forma de una ecuación equivalente.

REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE LAS ECUACIONES

EJEMPLO 1

La siguiente tabla muestra dos cantidades x y y que están relacionadas; marca los puntos para esbozar su gráfica y trata de escribir una ecuación para describir la dependencia entre ellas.

x	y
−3	9
−2	4
−1	1
0	0
1	1
2	4
3	9

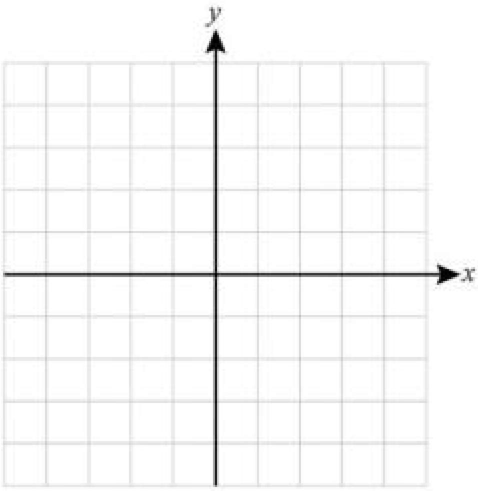


Ecuación

EJEMPLO 2

De la ecuación $2x - y = 3$ resuelve para y, completa la tabla mostrada y esboza su gráfica.

x	$y = 2x - 3$	(x, y)
−2		
−1		
0		
1		
2		
3		

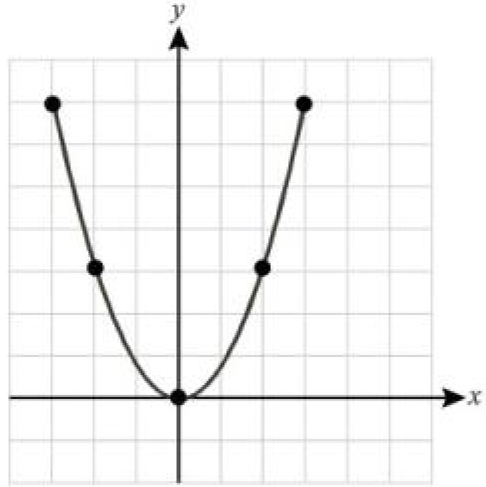


Ecuación

$y = 2x - 3$

Las gráficas y los resultados de los ejemplos 1 y 2 debieron quedar de la siguiente manera.

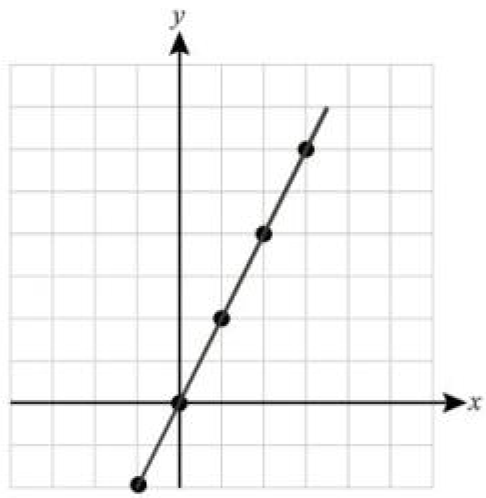
x	y
−3	9
−2	4
−1	1
0	0
1	1
2	4
3	9



Ecuación

$y = x^2$

x	$y = 2x - 3$	(x, y)
−2	−7	(−2, −7)
−1	−5	(−1, −5)
0	−3	(0, −3)
1	−1	(1, −1)
2	1	(2, 1)
3	3	(3, 3)



Ecuación

$y = 2x - 3$

Evidentemente que en estos ejemplos existe un número infinito de puntos en la gráfica, y es imposible graficarlos todos, pero mientras más dibujemos, nos daremos mejor idea del comportamiento gráfico de nuestras ecuaciones.

Los ejemplos anteriores nos enseñan que cuando tenemos una ecuación que incluye las variables x y y como en

$$x^2 + y^2 = 25 \qquad y = x^2 \qquad y = 2x - 3$$

un punto (x, y) que *satisface* la ecuación, —es decir que al sustituir los respectivos valores de x y y en la ecuación, la hace verdadera— es un punto del lugar geométrico de ésta. Por ejemplo (3, 4) hacen verdadera la ecuación $x^2 + y^2 = 25$, porque $3^2 + 4^2 = 25$. Por tanto, podemos definir la gráfica de una ecuación de la siguiente manera:

GRÁFICA DE UNA ECUACIÓN

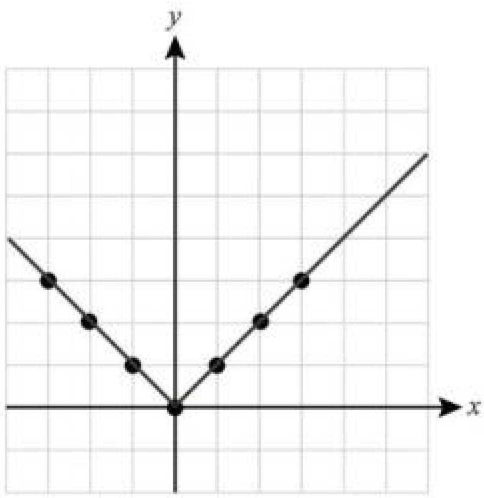
La gráfica de una ecuación en x y y es el conjunto de todos los puntos (x, y) del plano cartesiano que satisfacen a la misma.

EJEMPLO 3

Hallar la gráfica de la ecuación $y = |x|$, esta expresión se conoce como valor absoluto y se define como

$$y = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

x	y	(x, y)
−3	3	(−3, 3)
−2	2	(−2, 2)
−1	1	(−1, 1)
0	0	(0, 0)
1	1	(1, 1)
2	2	(2, 2)
3	3	(3, 3)



Ecuación

$y = |x|$

Elabora una tabla de valores y traza la gráfica de las siguientes ecuaciones, de los ejercicios 1 al 5:

EJERCICIO 1

$y = 2x - 3$

x	y	(x, y)

EJERCICIO 2

$y = |x| - 2$

x	y	(x, y)

EJERCICIO 3

$y = 2 - x^2$

x	y	(x, y)

EJERCICIO 4

$y = \sqrt{x}$

x	y	(x, y)

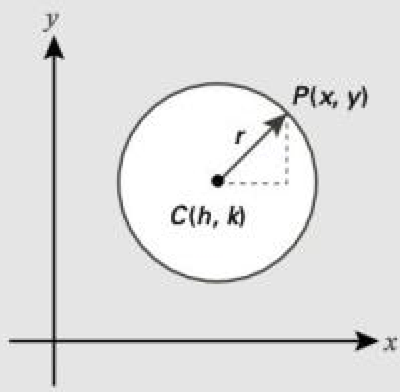
Ejercicio 5

$y = x^3$

x	y	(x, y)

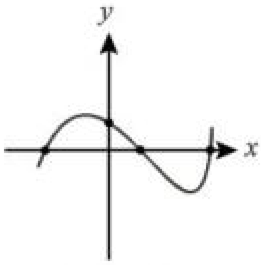
Ejercicio 6

Halla la ecuación que representa al círculo mostrado.
Sugerencia: Utiliza el teorema de *Pitágoras* para obtener tal ecuación.

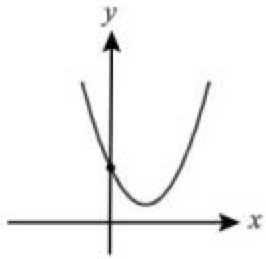


INTERSECCIONES DE UNA GRÁFICA

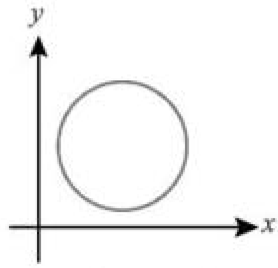
Los puntos donde la gráfica de una ecuación se cruza con los ejes coordenados se llaman intersecciones. En la *intersección* con el eje x es evidente que $y = 0$, es decir, las coordenadas del punto serán $(x, 0)$; en la *intersección* con el eje y, obviamente $x = 0$, por tanto, las coordenadas serán $(0, y)$.



Tres intersecciones en x, una en y

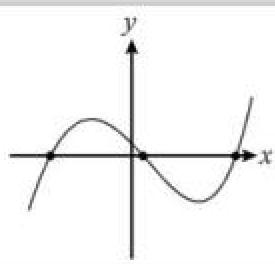
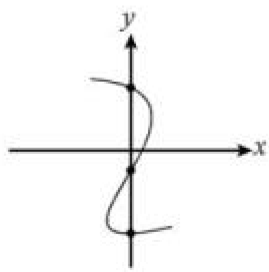


Una intersección en y

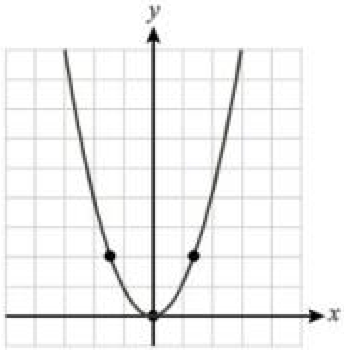


No hay intersecciones

Cuando una gráfica no tiene intersecciones, en la solución aparece una raíz cuadrada de un número negativo o la división por cero.

INTERSECCIONES DE UNA GRÁFICA CON LOS EJES COORDENADOS		
Intersecciones	*Procedimiento para obtenerlas*	*Gráfica*
Intersecciones con el eje x Puntos donde la curva se cruza con el eje x	Hacemos $y = 0$ y resolvemos para x	
Intersecciones con el eje y Puntos donde la curva se cruza con el eje y	Hacemos $x = 0$ y resolvemos para y	

EJEMPLO 1 Determinar las intersecciones en x y y de la gráfica de la ecuación $y = x^2 - 2$



Intersecciones en x

$x^2 - 2 = 0$ hacemos $y = 0$

$x^2 = 2$ sumamos 2 en cada lado

$x^2 = \pm\sqrt{2}$ resolvemos para x

Por tanto, las intersecciones con x están en $(\sqrt{2}, 0)$ y $(-\sqrt{2}, 0)$

Intersecciones en y

$y = 0^2 - 2$ hacemos $x = 0$, luego $y = -2$

Hay una sola intersección en y, y la gráfica se traza calculando cuantos puntos sean necesarios.

En las ecuaciones siguientes, de los ejercicios 1 a 5, determina las intersecciones en los ejes, elabora una tabla de valores y traza la gráfica correspondiente.

EJERCICIO 1

$x + y = 3$

Intersecciones en x
Intersecciones en y

x	y	(x, y)

EJERCICIO 2

$y = 1 - x^2$

Intersecciones en x
Intersecciones en y

x	y	(x, y)

EJERCICIO 3

$y = x^2 + 2x$

Intersecciones en x
Intersecciones en y

x	y	(x, y)

EJERCICIO 4

$x = |y|$

Intersecciones en x

Intersecciones en y

x	y	(x, y)

EJERCICIO 5

$y = \sqrt{4 - x^2}$

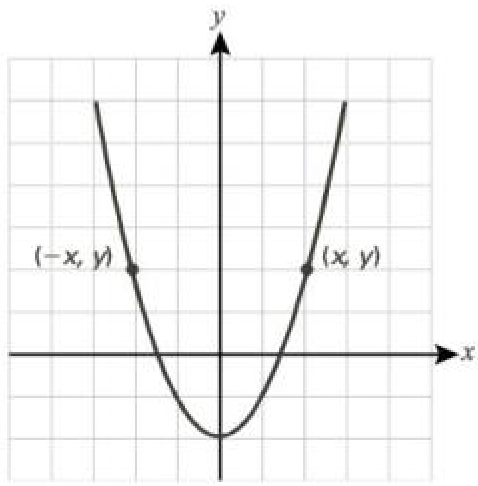
Intersecciones en x

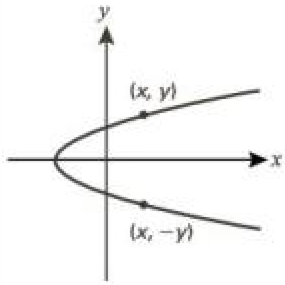
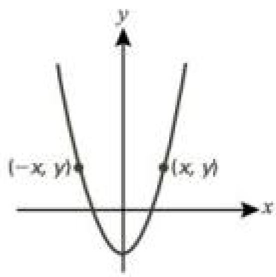
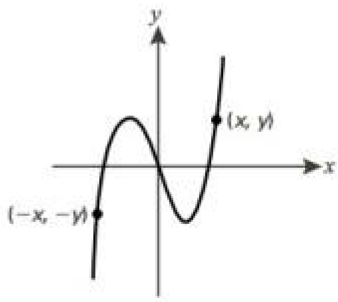
Intersecciones en y

x	y	(x, y)

SIMETRÍA

En la figura se muestra la gráfica de $y = x^2$; si el eje y fuese un espejo, entonces la parte izquierda de la curva es la imagen de la que está a la derecha. Es decir, la gráfica contiene el punto (x, y) y también a $(-x, y)$, y ambos son reflexiones uno del otro respecto al eje y. En estas condiciones, se dice que la curva es **simétrica respecto** al eje y. De la misma manera, si la gráfica contiene el punto (x, y) y el punto $(x, -y)$, entonces tiene **simetría respecto** al eje x. Finalmente, una gráfica es simétrica respecto al origen si siempre que (x, y) está sobre la gráfica también lo está $(-x, -y)$.



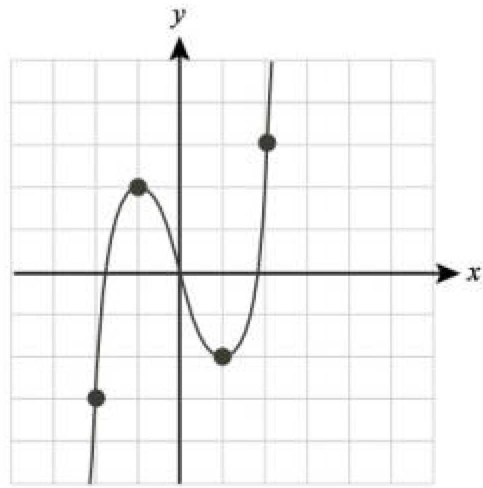
DEFINICIÓN DE SIMETRÍA		
Simetría	*Prueba de la simetría*	*Gráfica*
Simetría respecto al eje x	La ecuación no cambia al sustituir y por $-y$	
Simetría respecto al eje y	La ecuación no cambia al sustituir x por $-x$	
	La ecuación no cambia al sustituir x por $-x$ ni y por $-y$	

EJEMPLO 1

Determinar las intersecciones con los ejes, verificar la simetría y dibujar la gráfica de la ecuación $y = x^3 - 3x$

<table>
<tr><th>Intersecciones en x</th><th>Simetrías</th></tr>
<tr><td>Si $y = 0$, entonces $x^3 - 3x = 0$
$x(x^2 - 3) = 0,$
de donde $x = 0$ y $\pm\sqrt{3}$</td><td rowspan="3">Si sustituimos x por $-x$
y
y por $-y$ tenemos
$-y = (-x)^3 - 3(-x)$
$-y = -x^3 + 3x$
$y = x^3 - 3x$
La ecuación no ha cambiado. Significa que hay simetría respecto al origen.</td></tr>
<tr><th>Intersecciones en y</th></tr>
<tr><td>Si $x = 0$, entonces $y = 0$</td></tr>
</table>

x	-2	-1	1	2
y	-2	2	-2	2
(x, y)	$(-2, -2)$	$(-1, 2)$	$(1, -2)$	$(2, 2)$



En los siguientes ejercicios, determina las intersecciones con los ejes, verifica la simetría y grafica cada ecuación.

EJERCICIO 1

$y = -x + 2$

x				
y				
(x, y)				

Intersecciones en x	Simetrías
Intersecciones en y	

Ejercicio 2

$y = 3 - x^2$

x				
y				
(x, y)				

Intersecciones en x	Simetrías
Intersecciones en y	

Ejercicio 3

$y = x^3 - 2x$

x				
y				
(x, y)				

Intersecciones en x	Simetrías
Intersecciones en y	

Ejercicio 4

$y = x^2 + |x|$

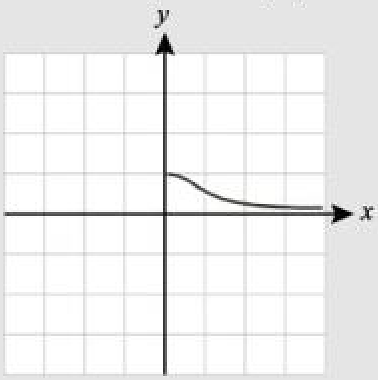
x				
y				
(x, y)				

Intersecciones en x	Simetrías
Intersecciones en y	

Ejercicio 5

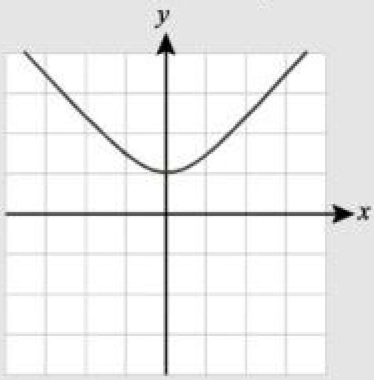
Completa la gráfica utilizando la propiedad de simetría dada.

Simetría respecto al eje y



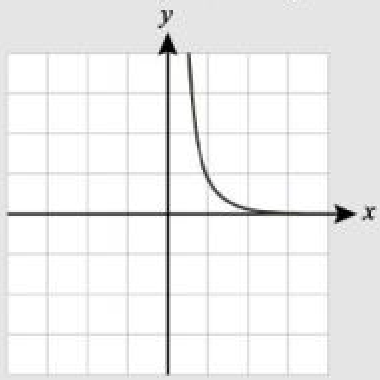
$$y = \frac{1}{1 + x^2}$$

Simetría respecto al eje x



$$y^2 - x^2 = 1$$

Simetría respecto al origen



$$y = \frac{1}{x^3}$$

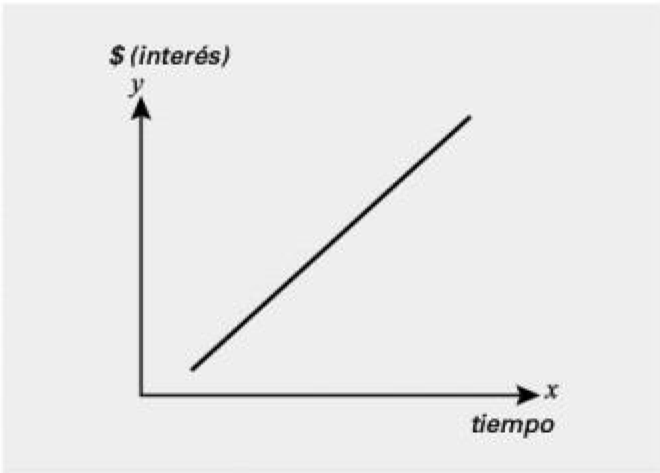
UNIDAD

2

LA LÍNEA RECTA

LÍNEA RECTA

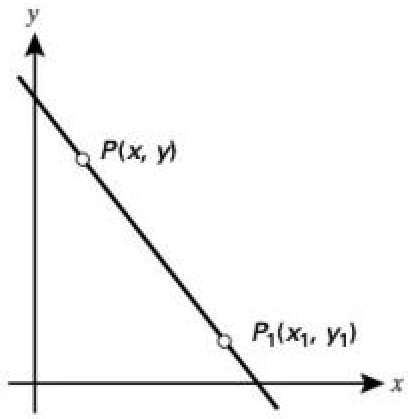
En la vida cotidiana, existen relaciones entre dos variables que pueden representarse como un lugar geométrico lineal. El modelo analítico y gráfico de una recta nos sirve para entender mejor situaciones de la naturaleza que se caracterizan por tener una *razón de cambio constante,* tal es caso de la tasa de crecimiento, el pago de impuestos, el interés simple de un capital, los ingresos económicos, etc. Por eso, es importante que conozcamos e identifiquemos las características algebraicas y geométricas de la línea recta.



La principal característica de la recta es que sus puntos siempre conservan la misma dirección; por lo tanto,

Recta. Es un lugar geométrico formado por puntos que tienen entre sí la misma pendiente.

ECUACIÓN DE LA RECTA QUE PASA POR UN *PUNTO* Y TIENE UNA *PENDIENTE* DADA



Trabajemos con la recta que se muestra en la figura.

$P(x, y)$ es un punto cualquiera de la recta.

$P_1(x_1, y_1)$ es un punto conocido de la recta.

m es la pendiente de la recta.

Ahora calculemos la pendiente de la recta, considerando estos dos puntos:

$$m = \frac{y - y_1}{x - x_1},$$

por lo tanto,

$$\boxed{y - y_1 = m(x - x_1)}$$

que representa la ecuación de la recta con pendiente m, que pasa por el punto $P_1(x_1, y_1)$.

EJEMPLO 1

Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto $(4, -1)$ y que tiene una inclinación de $135°$.

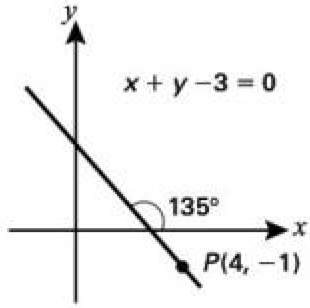
SOLUCIÓN

Recuerda que necesitamos un punto y la pendiente.

$m = \tan 135° = -1$, en este caso, la ecuación será

$$y-(-1) = -1(x-4)$$

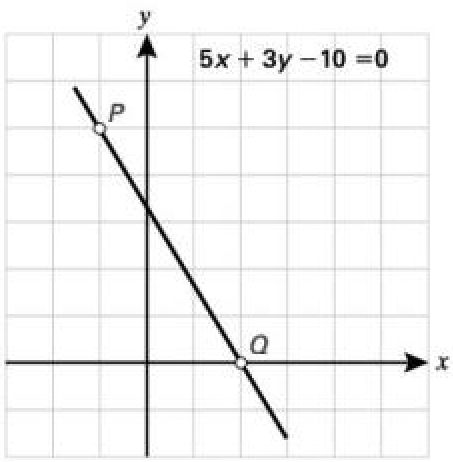
$$y + 1 = -x + 4$$



Esta última ecuación se puede expresar como $x + y - 3 = 0$, o bien $y = -x + 3$, que representa todos los puntos de la recta de la figura.

EJEMPLO 2

Escribir la ecuación de la recta mostrada en la gráfica, la cual pasa por $P(-1, 5)$ y $Q(2, 0)$.



SOLUCIÓN

Para conocer la pendiente, debemos hallar dos puntos cualesquiera, por ejemplo, $P(-1, 5)$ y $Q(2, 0)$.

$$m = \frac{0-5}{2-(-1)} = -\frac{5}{3},$$

luego, la ecuación es

$$y - 5 = -\frac{5}{3}(x - (-1))$$

$$y - 5 = -\frac{5}{3}(x + 1)$$

si a esta última ecuación la multiplicamos por 3

$$3(y - 5) = -5(x + 1)$$

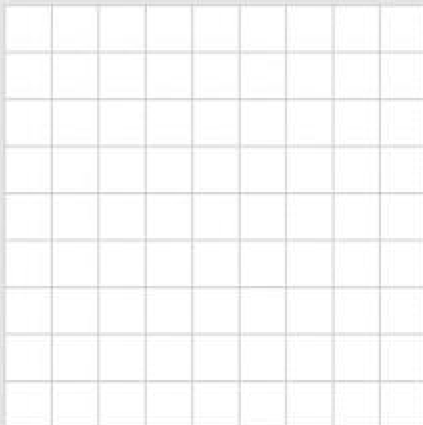
$$3y - 15 = -5x - 5,$$

o bien

$$\boxed{5x + 3y - 10 = 0}$$

EJERCICIO 1

Halla la ecuación de la recta que pasa por $(4,3)$ y tiene pendiente $m = 0$.

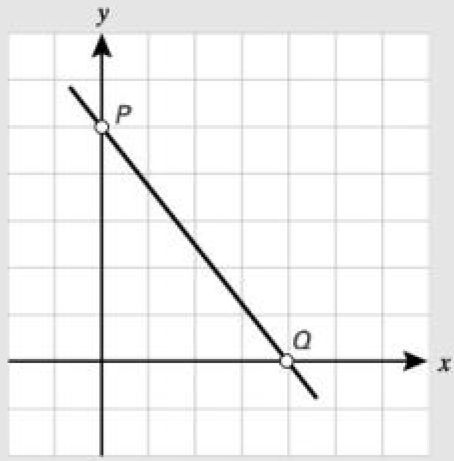


EJERCICIO 2

Halla la ecuación de la recta que pasa por $(-4,3)$ y tiene pendiente $m = \frac{3}{4}$.

EJERCICIO 3

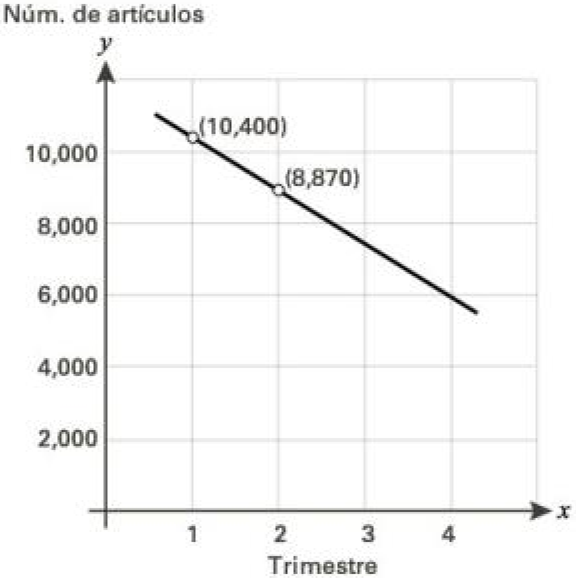
A partir de la gráfica, escribe la ecuación de la recta.



EJERCICIO 4

Con base en la ecuación $3x - 4y = 12$, encuentra su pendiente y un punto por el que pasa, y traza su gráfica.

EJEMPLO 3 Las ventas de un almacén de artículos deportivos al inicio del segundo trimestre ascendieron a 10,400 artículos, mientras que al cierre de éste fueron de 8,870 artículos.



a) Si las ventas se mantuvieron constantes, ¿cuál fue la tasa promedio de variación?
b) ¿Qué significa este resultado?
c) Elabora un modelo que nos permita calcular el número de artículos vendidos cada día x del segundo trimestre.

SOLUCIÓN

a) La tasa promedio de variación es la pendiente

$$m = \frac{8{,}870 - 10{,}400}{180 - 90} = -17 \text{ artículos/día}$$

$$m = \frac{8{,}870 - 10{,}400}{2 - 1} = 1{,}530\frac{\text{art.}}{\text{trim}} - \frac{1{,}530}{90} = -17\frac{\text{art.}}{\text{día}}$$

b) Las ventas disminuyeron a razón de 17 artículos cada día aproximadamente.

c) Es obvio que el modelo es lineal

$$\begin{aligned} y - 10{,}400 &= -17(x - 1) \\ y &= -17(x - 1) + 10{,}400 \\ y &= -17x + 10{,}417 \end{aligned}$$

donde y denota el número de artículos.

EJERCICIO 5

Interpreta la siguiente gráfica de ventas diarias de equipos personales de cómputo.

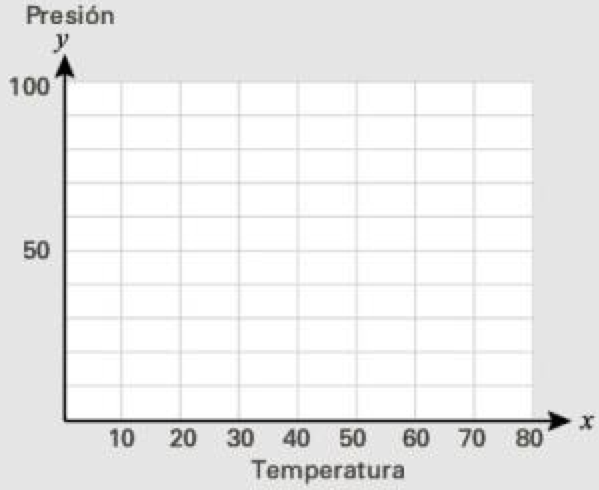
EJERCICIO 6

En 1990, TMW produjo 1,135 autos y, en 2,000, 1'825,000 autos. Si se supone un aumento constante cada año:

a) ¿Cuál fue la tasa promedio de producción anual?
b) Construye un modelo lineal para la producción de y vehículos anuales.
c) ¿Cuántos vehículos se produjeron en 1996?

EJERCICIO 7

De acuerdo con la ley de Charles, la presión P (en pascales) de un volumen de gas, se relaciona de forma lineal con la temperatura T (en grados centígrados). Un experimento dio como resultado que si $T = 40, P = 60$ y si $T = 80, P = 100$.

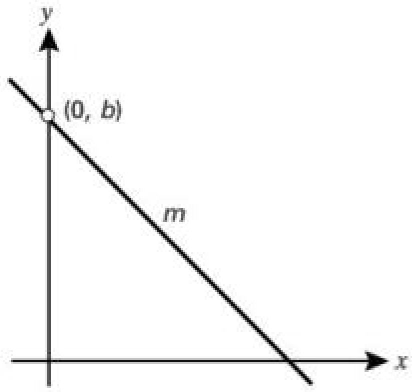


a) ¿Cuál es la pendiente de la recta que contiene estos puntos?

b) Explica el significado de la pendiente en este contexto.

c) Traza una gráfica de la función.

ECUACIÓN DE LA RECTA DADA SU PENDIENTE Y LA ORDENADA EN EL ORIGEN



Hallar la ecuación de la recta que pasa por $(0, b)$ y tiene pendiente m.

$$\begin{aligned} y - b &= m(x - 0) \\ y - b &= mx \\ y &= mx + b \end{aligned}$$

En el ejemplo, vemos que la intersección con el eje y es el punto $(0, b)$, al cual se le llama *ordenada en el origen;* por lo tanto,

La recta con pendiente m y ordenada en el origen b, tiene por ecuación:

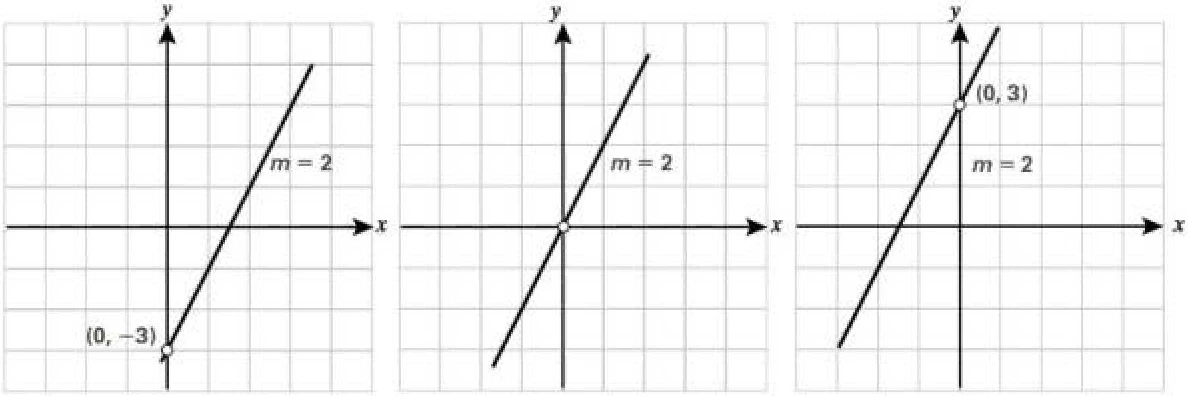
$$y = mx + b$$

Finalmente, observa que, independientemente de la forma de la ecuación de una recta, necesitamos dos condiciones para determinarla: *un punto y su pendiente*.

EJEMPLO 1 Graficar a partir de las siguientes rectas:

$$y = 2x - 3, y = 2x \quad \text{y} \quad y = 2x + 3.$$

SOLUCIÓN

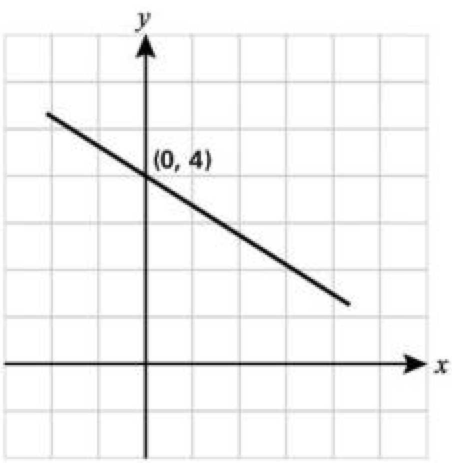


$y = 2x - 3$ $\qquad$ $y = 2x$ $\qquad$ $y = 2x + 3$

EJEMPLO 2 Escribir la ecuación de la recta de pendiente $-\frac{2}{3}$, y ordenada en el origen igual a 4.

SOLUCIÓN

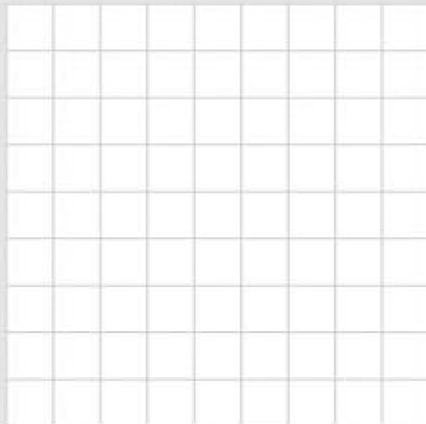
En la ecuación $y = mx + b$, sustituimos m por $-\frac{2}{3}$ y b por 4.



$$y = -\frac{2}{3}x + 4$$

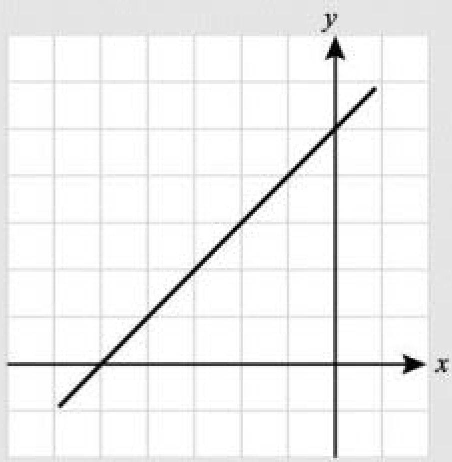
EJERCICIO 1

Determina la ecuación de la recta dependiente 3 y ordenada en el origen –2. Grafícala.



EJERCICIO 2

Obtén la ecuación de la recta mostrada en la figura.



Ejercicio 3

Determina la ecuación de la recta que tiene un ángulo de inclinación $\alpha = 135°$ y 5 de ordenada en el origen.

Ejercicio 4

Escribe y grafica la ecuación paralela a $y = \frac{1}{3}x$

a) Situada tres unidades arriba de ella sobre el eje y.

b) Situada dos unidades abajo del origen.

EJERCICIO 5

Un servicio básico de televisión por cable cuesta \$270 al mes y comprende 40 canales. Si deseas contratar un servicio Plus, que permite contratar más canales, el costo mensual es de \$25 por cada canal solicitado.

a) Escribe un modelo lineal para el pago mensual y por x canales.

b) Utiliza este modelo para calcular el pago mensual si tienes 46 canales.

c) Grafica tu modelo. ¿Qué representa la intersección de la recta con el eje y?

Ejercicio 6

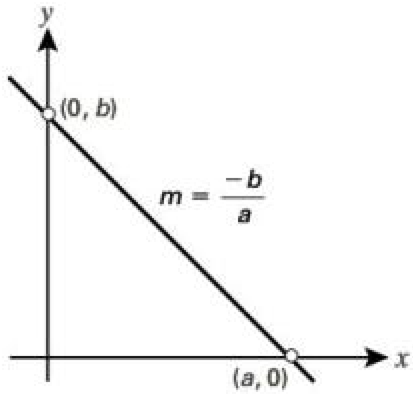
Por una llamada de larga distancia, la compañía telefónica celular cobra una cuota fija de \$4.00 por el primer minuto y \$3.00 por cada minuto adicional.

a) Escribe un modelo para el pago y por x minutos.

b) ¿Cuánto pagarás por una llamada de 13 minutos?

c) Escribe un modelo que incluya el pago del IVA.

ECUACIÓN DE LA RECTA EN SU FORMA SIMÉTRICA



Hallar la ecuación de la recta que pasa por los puntos $(a, 0)$ y $(0, b)$.

Primero calculamos la pendiente m:

$$m = \frac{b-0}{0-a} = -\frac{b}{a}$$

En seguida buscamos su ecuación:

$$y - b = -\frac{b}{a}(x - 0)$$

multiplicando por a $\qquad ay - ab = -bx$

$$bx + ay = ab$$

dividiendo todo por ab $\qquad \dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1.$

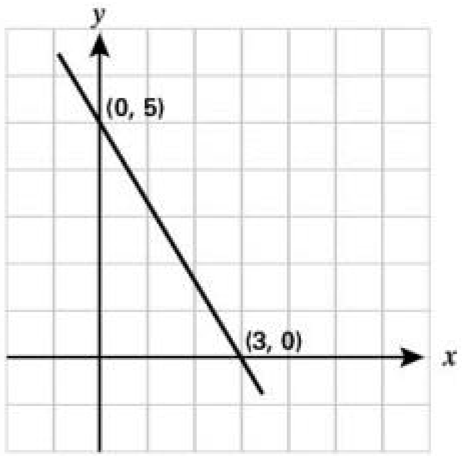
El ejercicio nos enseña que si conocemos los puntos de intersección de una recta con los ejes coordenados, encontraremos su *ecuación en la forma simétrica.*

La recta que se interseca con los ejes coordenados en los puntos $(a, 0)$ y $(0, b)$ tiene por ecuación:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \qquad a \text{ y } b \neq 0$$

y se llama *forma simétrica.*

EJEMPLO 1 Encontrar la ecuación de la recta que se muestra en la figura siguiente.



SOLUCIÓN

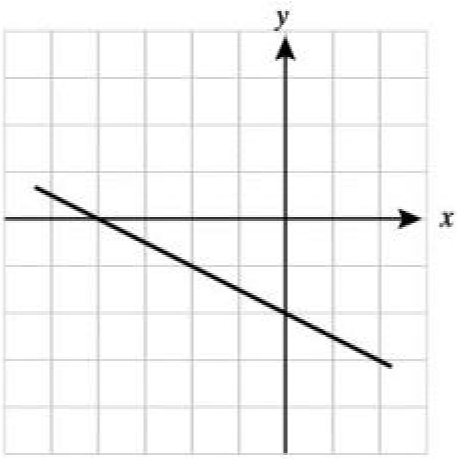
En la ecuación $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$, sustituimos a por 3 y b por 5.

$$\frac{x}{3} + \frac{y}{5} = 1$$

Si multiplicamos la forma simétrica por 15, entonces la ecuación es

$$5x + 3y = 15 \quad \text{o} \quad 5x + 3y - 15 = 0$$

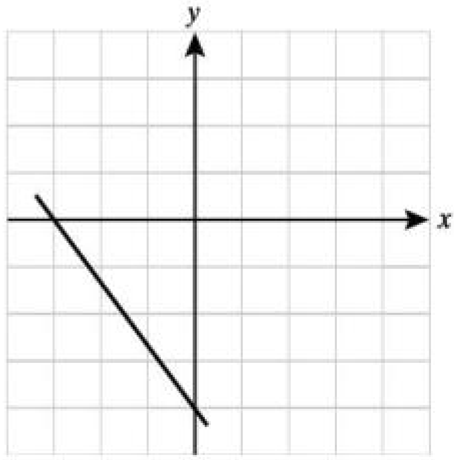
EJEMPLO 2 Hallar la ecuación de la recta que pasa por $(-4, 0)$ y $(-2, 0)$ en su forma simétrica.



SOLUCIÓN

$$\frac{x}{-4} + \frac{y}{-2} = 1 \text{ forma simétrica}$$

EJEMPLO 3 Determinar las intersecciones con los ejes coordenados de la recta $4x + 3y + 12 = 0$.



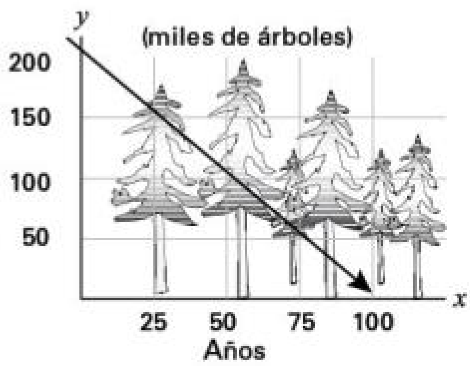
SOLUCIÓN

Para hallar la intersección con el eje x, hagamos $y = 0$, y la ecuación queda $4x + 12 = 0$, donde $x = -3$.

En la intersección con el eje y, hacemos $x = 0$; por lo tanto, $3y + 12 = 0$, donde $y = -4$

Otra solución es dividir toda la ecuación entre 12.

EJEMPLO 4 La gráfica muestra un reporte sobre el comportamiento de la tala inmoderada de árboles en una región en 1990. El estudio alerta acerca del riesgo de devastación ecológica si no se toman medidas eficaces para la reforestación.



a) ¿Cuántos árboles existen al iniciar el estudio?
b) ¿En qué año se extinguirán por completo los árboles?
c) ¿A qué ritmo disminuyen los árboles?
d) Elabora un modelo del comportamiento poblacional de los árboles.

SOLUCIÓN

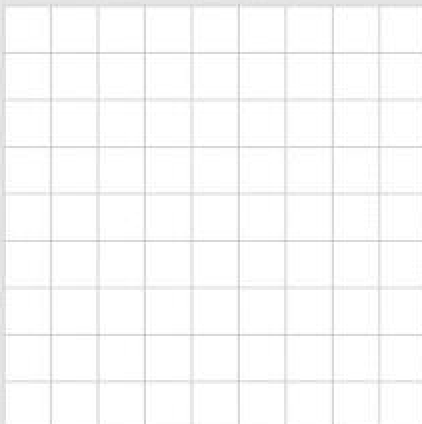
a) 200,000 árboles.
b) En el año 1990 + 100 = 2,090.

c) $m = \frac{200{,}000}{100} = \frac{2{,}000}{1} = 2{,}000$ árboles por año.

d) $\frac{x}{100} + \frac{y}{200} = 1$; si multiplicamos todo por 200, tenemos $2x + y = 200$, o bien $y = 200 - 2x$.

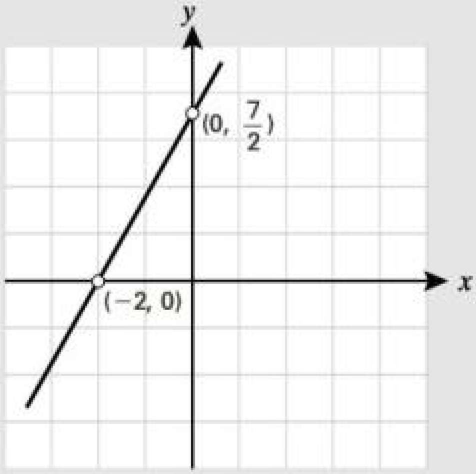
EJERCICIO 1

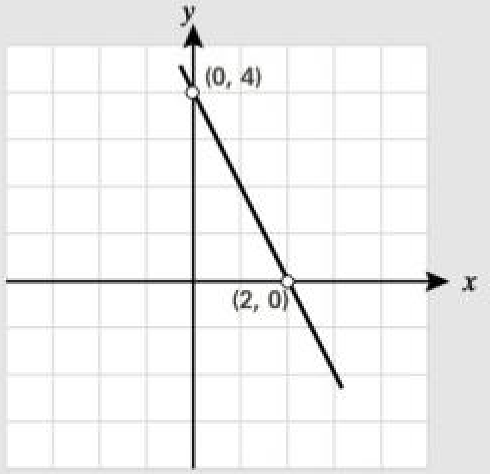
Encuentra, en su forma simétrica, la ecuación de la recta que pasa por $(-4, 0)$ y $(0, 2)$.



Ejercicio 2

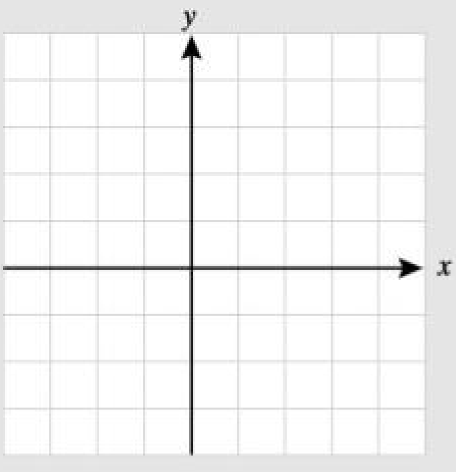
Escribe la ecuación de las rectas que se presentan a continuación en su forma simétrica:





Ejercicio 3

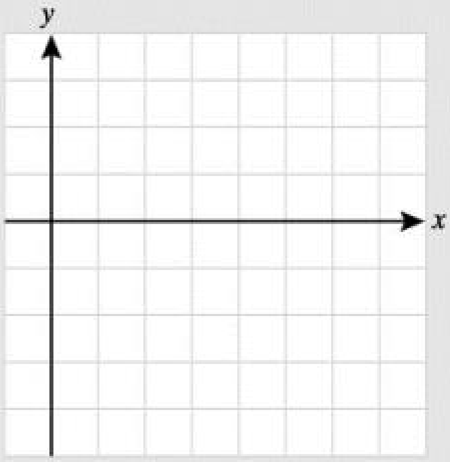
Encuentra las intersecciones de la recta $2x + 3y - 6 = 0$ con los ejes coordenados.



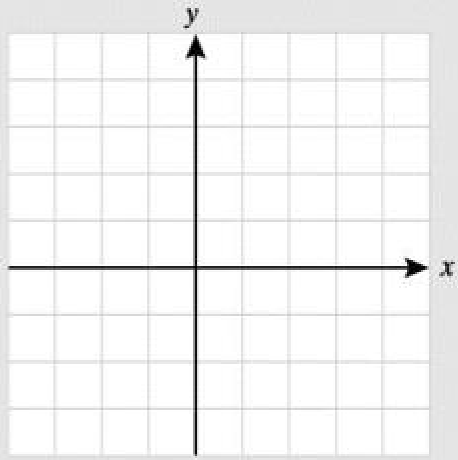
EJERCICIO 4

Grafica las siguientes ecuaciones:

a) $\dfrac{x}{7} + \dfrac{y}{-4} = 1$



b) $\dfrac{x}{\frac{7}{2}} + \dfrac{y}{3} = 1$



FORMA GENERAL DE LA ECUACIÓN DE LA RECTA

Hasta aquí, hemos visto varias formas de escribir la ecuación de una línea recta. Sin embargo, al final de este estudio, encontraremos que, en el plano coordenado, la recta puede expresarse siempre mediante lo que llamamos forma lineal, ecuación de primer grado o forma general, la cual es:

$$\boxed{Ax + By - C = 0}$$

en donde A o B deben ser diferentes de cero y C puede o no ser igual a cero. Observemos una recta que pasa por el punto $(4, 2)$ y tiene pendiente $m = -2$.

Forma punto-pendiente $y - y_1 = m(x - x_1)$	Forma pendiente y ordenada en el origen $y = mx + b$	Forma simétrica $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$	Forma general $Ax + By + C = 0$
$y - 2 = -2(x - 4)$	$y = -2x + 10$	$\frac{x}{5} + \frac{y}{10} = 1$	$2x + y - 10 = 0$

Ahora bien, si despejamos y de la forma general $Ax + By + C = 0$, la ecuación resultante es

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B},$$

que es la forma pendiente y ordenada en el origen $y = mx + b$; luego, si comparamos ambas ecuaciones, tenemos

$$\boxed{m + = -\frac{A}{B} \quad \text{y} \quad b = -\frac{C}{B}}$$

Lo anterior nos enseña que podemos pasar de una forma a otra, según nos convenga, sólo con realizar las transformaciones algebraicas necesarias y pertinentes.

EJEMPLO 1 Escribir cada una de las siguientes ecuaciones en su forma general:

a) $y - 1 = -\frac{2}{3}(x - 3)$ **b)** $y = 3x - 5$ **c)** $\frac{x}{2} + \frac{y}{8} = 1$

SOLUCIÓN

a) $y - 1 = -\frac{2}{3}(x - 3)$

$3y - 3 = -2(x - 3)$ Al multiplicar por 3 ambos lados.

$3y - 3 = -2x + 6$ Se multiplica el término en paréntesis.

$2x + 3y - 9 = 0$ Se traspone el segundo término y se iguala a cero.

b) $y = 3x - 5$

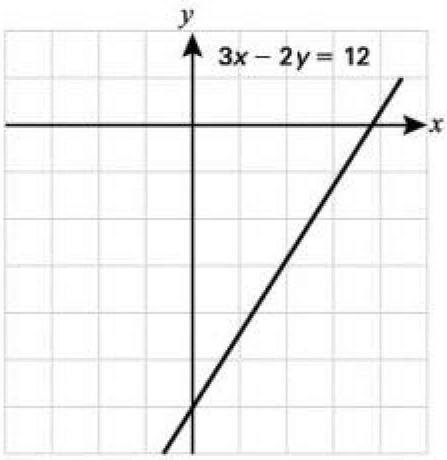
$3x - y - 5 = 0$ Se trasponen los términos y se iguala a cero.

c) $\frac{x}{2} + \frac{y}{8} = 1$

$4x + y = 8$ Se multiplica por 8 en ambos lados.

$4x + y - 8 = 0$ Se iguala a cero.

EJEMPLO 2 Determinar la pendiente, ordenada en el origen y gráfica de $3x - 2y = 12$.



SOLUCIÓN

$3x - 2y = 12$

$-2y = -3x + 12$ Se trasponen los términos.

$y = \frac{3}{2x} - 6$ Se dividen ambos lados entre -2.

Por lo tanto, $m = \frac{3}{2}$ y $b = -6$.

EJEMPLO 3 Un nutriólogo debe preparar un platillo de 225 g con 20% de grasa, usando los siguientes ingredientes: queso con 35% de grasa y guisado con 15% de grasa.

a) Elaborar un modelo para porcentajes de grasa.
b) ¿Son adecuados 50 g de queso?

SOLUCIÓN

a) $0.35x + 0.15y = 0.20(225)$

$35x + 15y = 20(225)$ Se multiplica todo por 100.

$7x + 3y = 900$ Se simplifica.

b) Para $x = 50$, $y = 183.3$; luego, $50 + 183.3 = 233.3$ g, lo cual excede la ración máxima de 225 g. Por lo tanto, no pueden suministrarse los 50 g de queso.

EJERCICIO 1

Escribe la ecuación general de la recta que pasa por los puntos $(2, 5)$ y $(1, -2)$.

EJERCICIO 2

Halla la ecuación general de la recta que pasa por los puntos $(2, 0)$ y $(0, 5)$.

EJERCICIO 3

Determina la pendiente, ordenada en el origen y haz la gráfica de $4x - 5y = 20$.

EJERCICIO 4

Escribe la ecuación general de cada una de las siguientes rectas.

a) $y = -\frac{7}{3}x - 2$ **b)** $y = 5x - 8$ **c)** $y = -4x$ **d)** $y = 11$

EJERCICIO 5

A partir de la ecuación $-2x + 3y - 6 = 0$, escribe su forma simétrica y encuentra su gráfica.

Ejercicio 6

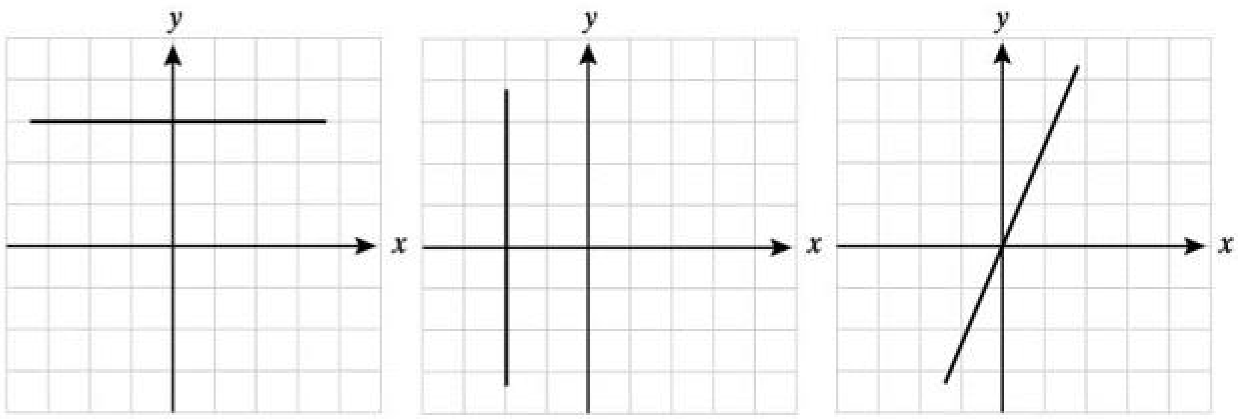
Tienes $1,200 y deseas comprar camisas y pantalones cuyos precios son de $80 y $150, respectivamente. ¿Cuántas prendas puedes comprar de cada tipo?

Ecuación general de primer grado

Ya habíamos mencionado que la ecuación general de la recta $Ax + By + C = 0$ con pendiente $m = -\frac{A}{B}$ y ordenada en el origen $b = -\frac{C}{B}$ también se denomina ecuación de primer grado.

El análisis de los valores A, B y C nos permite identificar directamente la posición de una recta, así como establecer propiedades importantes de ésta.

$By + C = 0$ si $A = 0$ (recta horizontal) | $Ax + C = 0$ si $B = 0$ (recta vertical) | $Ax + By = 0$ si $C = 0$ (recta que pasa por el origen)



EJEMPLO 1 Bosquejar de manera directa la gráfica de cada una de las ecuaciones siguientes:

a) $-5x + 4y - 20 = 0$

b) $3x - 6y = 0$

c) $8x - 4 = 0$

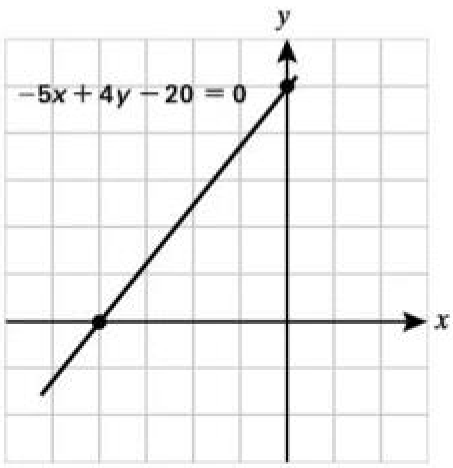
d) $3y - 15 = 0$

SOLUCIÓN

a) $-5x + 4y - 20 = 0$

$$\frac{x}{-4} + \frac{y}{5} = 1$$

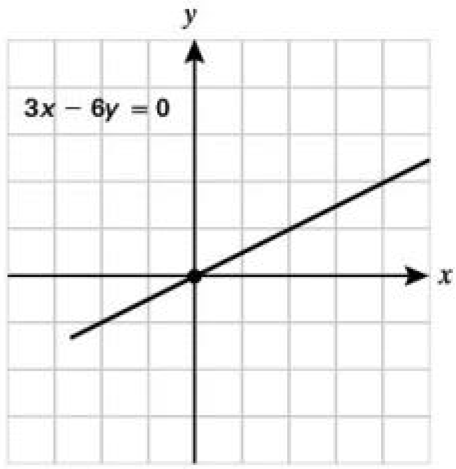
(forma simétrica)



b) $3x - 6y = 0$

$$m = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

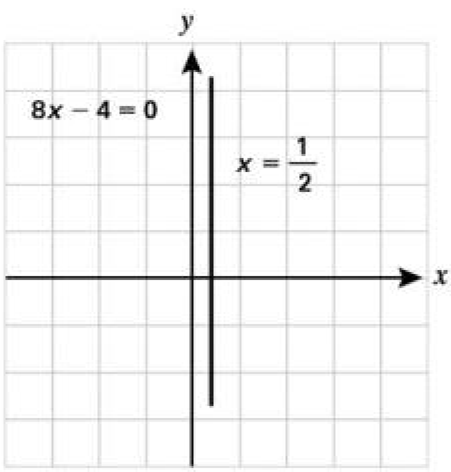
(pasa por el origen)



c) $8x - 4 = 0$

$$x = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

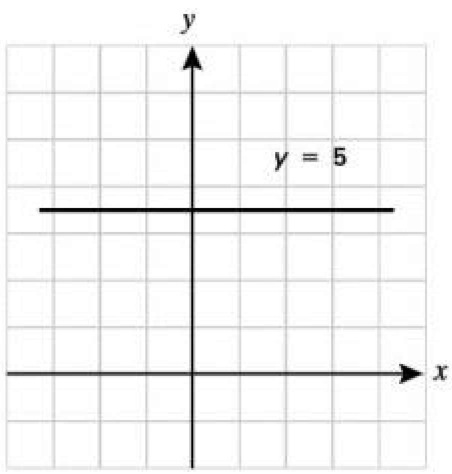
(recta vertical)



d) $3y - 15 = 0$

$$y = \frac{15}{3} = 5$$

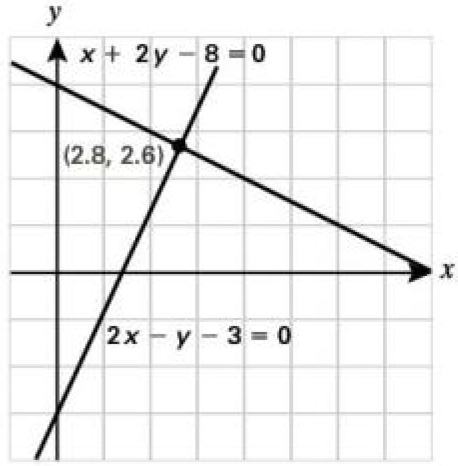
(recta horizontal)



EJEMPLO 2 Encontrar la ecuación de la recta que pasa por $(2, 3)$ y que es perpendicular a la recta $2x - y - 3 = 0$. Hallar también el punto de intersección.

SOLUCIÓN

La pendiente de $2x - y - 3 = 0$ es $m_1 = -\frac{A}{B} = -\frac{2}{-1} = 2$; por lo tanto, la pendiente de la recta que se trata de determinar es $m_2 = -\frac{1}{2}$, porque es perpendicular.



Con este dato y el punto $(2, 3)$, podemos escribir su ecuación:

$y - 3 = -\frac{1}{2}(x - 2)$	Forma punto-pendiente.
$2y - 6 = -1(x - 2)$	Se multiplican ambos lados por 2.
$2y - 6 = -x + 2$	Se simplifica.
$x + 2y - 8 = 0,$	que es la forma general.

Encontramos el punto de intersección de las rectas, si resolvemos simultáneamente las dos ecuaciones.

$$\begin{array}{l} 2x - y - 3 = 0, \\ x + 2y - 8 = 0 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 4x - 2y - 6 = 0 \\ x + 2y - 8 = 0 \\ \hline 5x + 0 - 14 = 0 \end{array}$$

Se multiplica toda la ecuación por 2.

$$x = \frac{14}{5} = 2.8$$

Se despeja y resuelve.

De $2x - y - 3 = 0$, despejamos y y resolvemos para $x = \frac{14}{5} = 2.8$:

$$y = 2x - 3 = 2\left(\frac{14}{5}\right) - 3 = \frac{13}{5} = 2.6.$$

El punto de intersección se encuentra en $(2.8, 2.6)$.

Ejercicio 1

Identifica y grafica el tipo de recta representada por cada ecuación:

a) $-x + y = 1$ **b)** $3x + 4y = 0$ **c)** $3x + 9 = 0$

Ejercicio 2

Con una flecha, relaciona cada ecuación con su descripción.

a) $x = y$

b) $12x - 24 = 0$

c) $9x - 3y + 45 = 0$

1) Recta con $m = 3$, no pasa por el origen.

2) Recta con $m = \frac{1}{2}$.

3) Recta con $m = 1$, que pasa por el origen.

4) Recta vertical, 2 unidades a la derecha del eje y.

EJERCICIO 3

Escribe la ecuación de la recta que pasa por $(2, -3)$ y es paralela a $5x - 3y + 2 = 0$.

EJERCICIO 4

Halla la ecuación de la recta que pasa por $(-2, 5)$ y es perpendicular a $3x - 4y - 12 = 0$. También obtén el punto de intersección de las rectas.

EJERCICIO 5

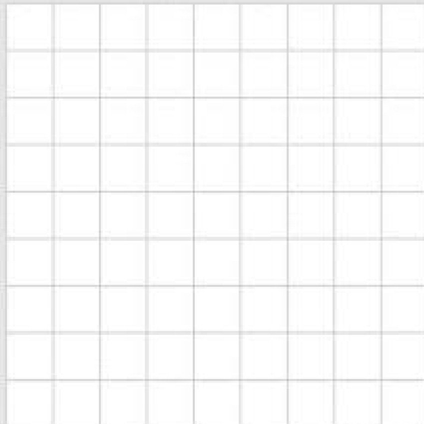
Halla la pendiente y la ordenada en el origen de la recta $x - 2y - 4 = 0$, y grafica la recta.

EJERCICIO 6

Encuentra el valor de k para que la recta $kx + (k - 1)y - 18 = 0$ sea paralela a la recta $4x + 3y + 7 = 0$.

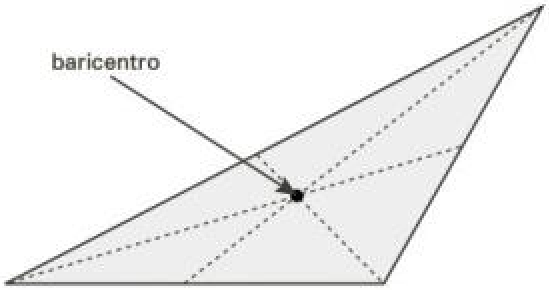
EJERCICIO 7

Obtén la ecuación de la mediatriz del segmento con extremos $(-1, 4)$ y $(5, -2)$.
(*Mediatriz*: recta perpendicular a un segmento y que pasa por su punto medio).

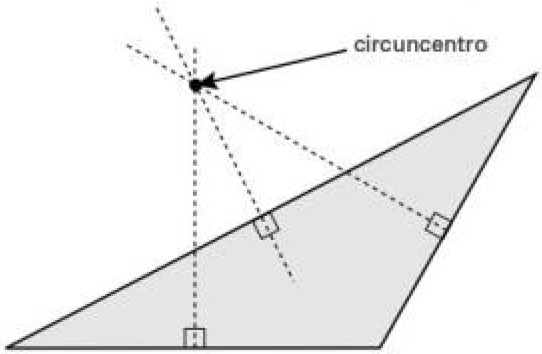


Rectas notables de un triángulo

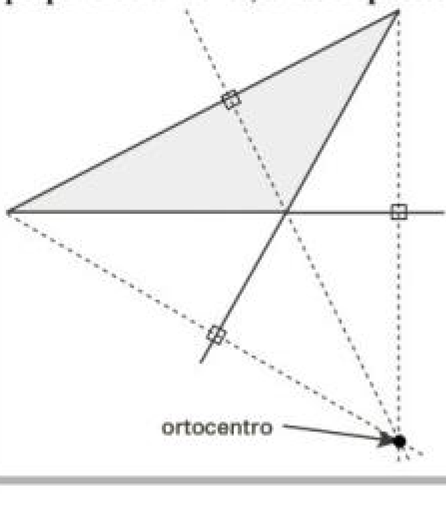
Mediana. Recta que va de un vértice al punto medio del lado opuesto.



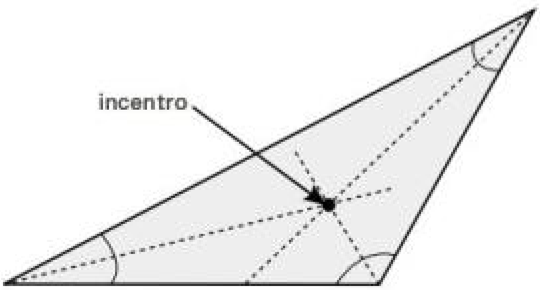
Mediatriz. Recta que corta perpendicularmente el punto medio de los lados de un triángulo.



Altura. Recta que va de un vértice, perpendicularmente, al lado opuesto.



Bisectriz. Recta que pasa por los vértices, partiendo el ángulo en dos partes iguales.



EJERCICIO 1

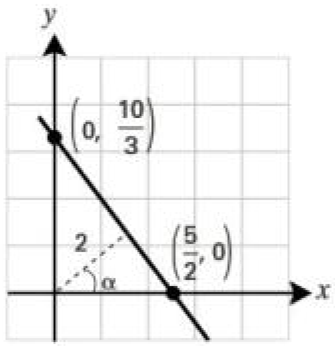
Los vértices de un triángulo son (1, 1), (4,7) y (6, 3). Demuestra que el baricentro, el circuncentro y el ortocentro están sobre una misma línea recta. Dibuja únicamente el triángulo, destacando los puntos mencionados; es decir, sin trazar las rectas notables del triángulo.

FORMA NORMAL DE LA ECUACIÓN DE LA RECTA

La ecuación normal de la recta $Ax + By + C = 0$ se obtiene dividiendo cada término entre $\pm\sqrt{A^2 + B^2}$ con el signo contrario a C.

EJEMPLO 1

Obtener la ecuación normal de la recta $4x + 3y = 10$ e indicar la distancia al origen.



SOLUCIÓN

Si dividimos $4x + 3y = 10$ entre $\sqrt{(4)^2 + (3)^2} = 5$, obtenemos:

$$\frac{4x}{5} + \frac{3y}{5} = \frac{10}{5} = 2.$$

El valor 2 es la *distancia* del origen a la recta; mientras que los valores $\frac{3}{5}$ y $\frac{4}{5}$ son el *seno* y el *coseno* del ángulo que forma esta distancia con el eje x.

Con esto, la ecuación de la forma normal equivale a:

$$\boxed{x \cos \alpha + y \operatorname{sen} \alpha = d}$$

donde d es la distancia perpendicular del origen a la recta.

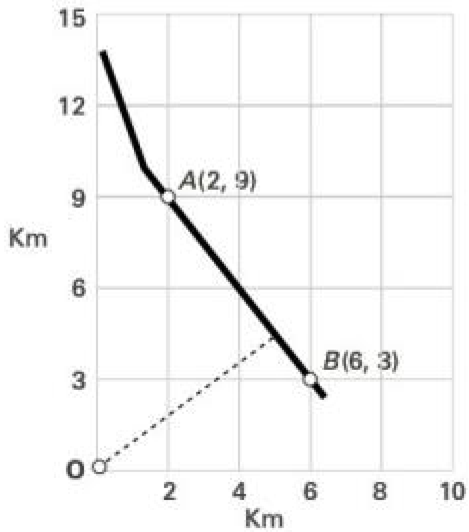
EJEMPLO 2 Hallar la ecuación normal de $6x - 8y + 5 = 0$ y la distancia al origen.

SOLUCIÓN

$-\sqrt{A^2 + B^2} = -\sqrt{6^2 + 8^2} = -10$; por lo tanto, la forma normal es:

$$\frac{6x}{-10} - \frac{8y}{-10} = \frac{1}{2}, \text{ y la distancia al origen es } d = \frac{1}{2}.$$

EJEMPLO 3 Para comunicar dos poblados (A y B), se ha construido un camino recto de asfalto. ¿A qué distancia de la entrada del fraccionamiento O quedará la carretera?



SOLUCIÓN

$$m = \frac{3 - 9}{6 - 2} = \frac{-6}{4} = -\frac{3}{2}$$

$$y - 9 = -\frac{3}{2}(x - 2) \qquad \text{Modelo del camino de asfalto.}$$

$$3x + 2y - 24 = 0$$

$$\frac{3}{\sqrt{13}}x + \frac{2y}{\sqrt{13}} = \frac{24}{\sqrt{13}} \qquad \text{Forma normal.}$$

La distancia que se busca es $d = \dfrac{24}{\sqrt{13}} = 6.65$ km.

EJERCICIO 1

Escribe la ecuación normal de cada recta y calcula su distancia al origen.

a) $x + y = 0$

b) $x - 2y + 4 = 0$

c) $7x + 3y = 3\sqrt{50}$

d) $15x + 20y = 24$

EJERCICIO 2

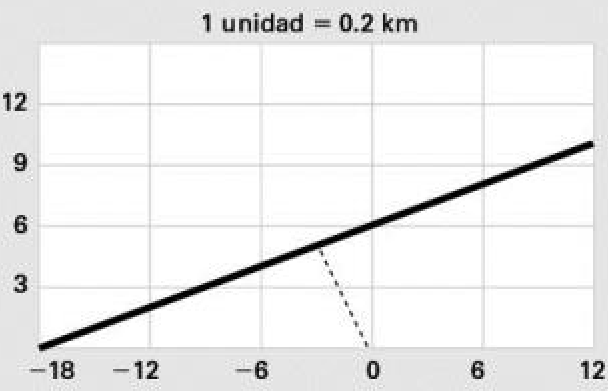
Escribe la ecuación $\frac{x}{\sqrt{5}} + \frac{y}{\sqrt{5}} = 2$ en su forma general.

EJERCICIO 3

Obtén la distancia al origen y el ángulo que forma la normal con el eje x, para la recta $5x - 3y = 2\sqrt{34}$.

EJERCICIO 4

Calcula la distancia de la pista principal a la torre de control del aeropuerto, si ésta se ubica en (0, 0).



DISTANCIA DE UN PUNTO A UNA RECTA

La *distancia dirigida* del punto $P_1(x_1, y_1)$ a la recta $Ax + By + C = 0$ está dada por

$$d = \frac{Ax_1 + By_1 + C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}},$$

donde el radical lleva signo igual a B.

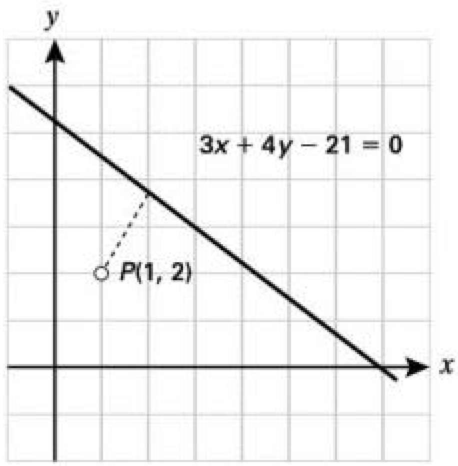
La distancia dirigida resulta *positiva* cuando entre el origen y el punto está la recta, y *negativa* cuando están del mismo lado.

Si no es relevante distinguir la posición de la recta respecto al punto y al origen, el signo de la distancia carece de importancia.

EJEMPLO 1 Para el punto $P(1, 2)$ y la recta $3x + 4y - 21 = 0$, determinar:

a) La distancia dirigida de la recta al punto.

b) La distancia del punto a la recta.



SOLUCIÓN

a) $A = 3, B = 4$ y $C = -21$; por lo tanto,

$$d = \frac{3(1) + 4(2) - 21}{+\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{-10}{5} = -2 \quad \text{Distancia dirigida.}$$

Como es negativa, el punto y el origen están del mismo lado de la recta.

b) $d = 2$.

EJERCICIO 1

Calcula la distancia dirigida de la recta $3x + 4y + 1 = 0$ al punto $(5, 6)$.

EJERCICIO 2

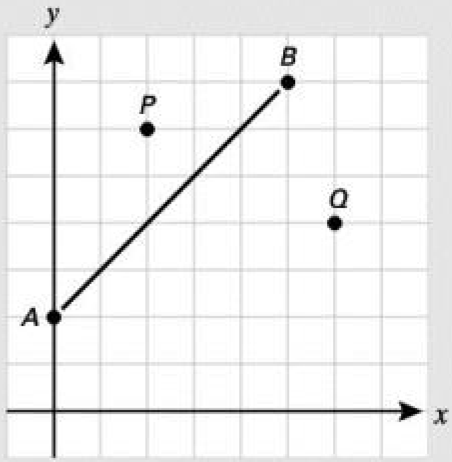
Calcula la distancia dirigida de la recta $3x - 4y = 8$ al punto $(1, 5)$.

EJERCICIO 3

Un atleta salta con garrocha desde el punto $P(2,6)$ y cae del otro lado de la barra en el punto $Q(6,4)$. Si los postes de la barra están situados en $A(0,2)$ y $B(5,7)$,

a) ¿A qué distancia estaba de la línea de la barra en el piso al iniciar el salto?

b) ¿A qué distancia de esta línea quedó al concluir su ejecución?



UNIDAD

3

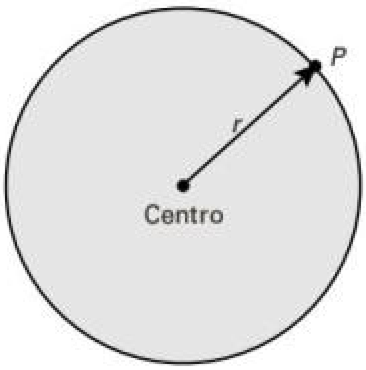
LA CIRCUNFERENCIA

LA CIRCUNFERENCIA

Después de la recta, la línea que nos resulta más familiar es la circunferencia, que desde la antigüedad atrajo el interés del hombre por su belleza y equilibrio. La rueda, uno de los inventos que impulsó el desarrollo de la humanidad, se construyó a partir de esta figura básica.

En esta sección, aprenderemos a emplear las propiedades de esta curva, valiéndonos de su definición a partir de sus características algebraicas y geométricas.

CIRCUNFERENCIA



Es un lugar geométrico que resulta al mover un punto P en un plano, de tal manera que permanece siempre a la misma distancia (*radio* $= r$) de otro punto fijo llamado *centro*.

SEGMENTOS, PUNTOS Y RECTAS ASOCIADOS CON LA CIRCUNFERENCIA

Recta tangente. Es una recta que toca la circunferencia en un punto.

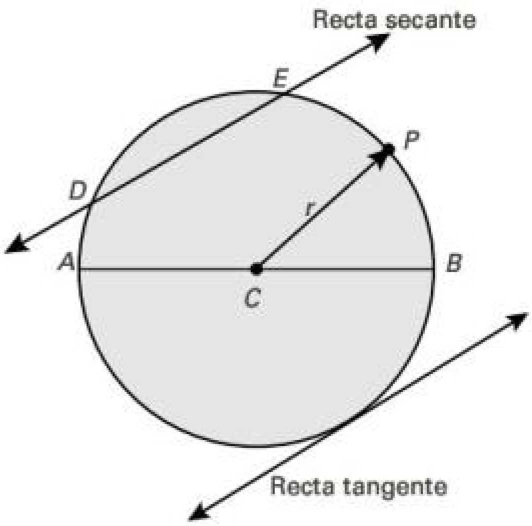
Recta secante. Recta que corta la circunferencia en dos puntos.

Segmento DE, se llama cuerda y va de un punto a otro de la circunferencia.

Segmento AB es el diámetro. Es una cuerda que pasa por el centro.

r es el radio, que es la mitad del diámetro.

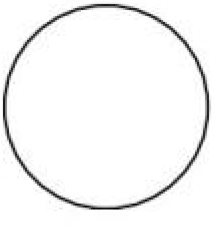
C es el centro.

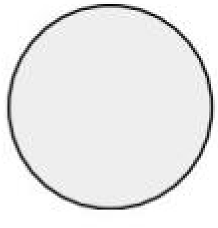


Para trazar una circunferencia, existen varias alternativas, pero lo más convencional usar un compás, o bien un hilo, un punto fijo y un lápiz.

DIFERENCIA ENTRE CÍRCULO Y CIRCUNFERENCIA

Geométricamente, la diferencia entre circunferencia y círculo estriba en que la primera es una línea (longitud) y el segundo es una región (área).

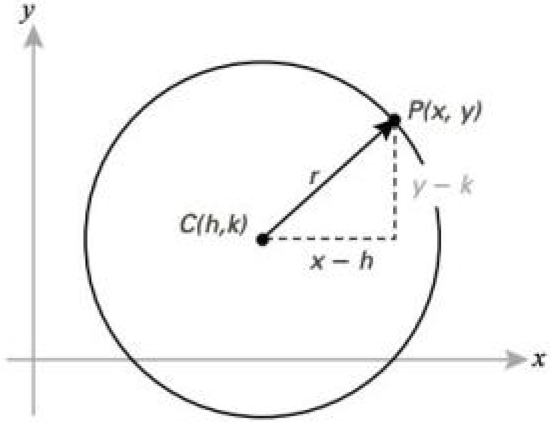




ECUACIÓN DE LA CIRCUNFERENCIA CON CENTRO $C(h, k)$

La definición de *circunferencia* nos lleva necesariamente a recordar una vez más la importancia del *teorema de Pitágoras.*

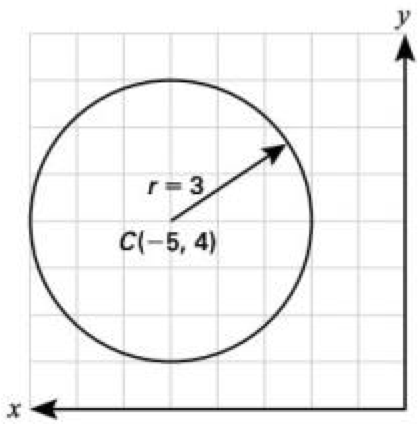
En la figura, el punto $P(x, y)$ es un punto cualquiera de la circunferencia y $C(h, k)$ es el centro, por lo tanto, los catetos del triángulo son $(x - h)$ y $P(y - k)$, y la hipotenusa es el radio r. Así, según el teorema de Pitágoras:



$$(x - h)^2 \quad \text{y} \quad P(y - k)^2 = r^2.$$

Esta ecuación representa el lugar geométrico llamado *circunferencia.*

EJEMPLO 1 Hallar la ecuación de la circunferencia de centro $(-5, 4)$ y radio $r = 3$.

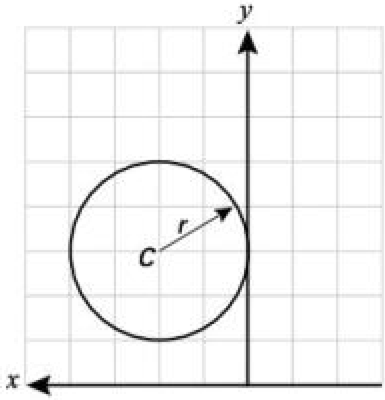


SOLUCIÓN

En este ejemplo, $h = -5$ y $k = 4$, entonces su ecuación es: $[x - (-5)]^2 + (y - 4)^2 = (3)^2$.

$(x + 5)^2 + (y - 4)^2 = (3)^2$	Ecuación normal
$x^2 + 10x + 25 + y^2 - 8y + 16 = 9$	Al desarrollar los binomios
$x^2 + y^2 + 10x - 8y + 32 = 0$	Es la ecuación buscada

EJEMPLO 2 Determinar el centro y el radio de la circunferencia $(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 4$ y graficar.

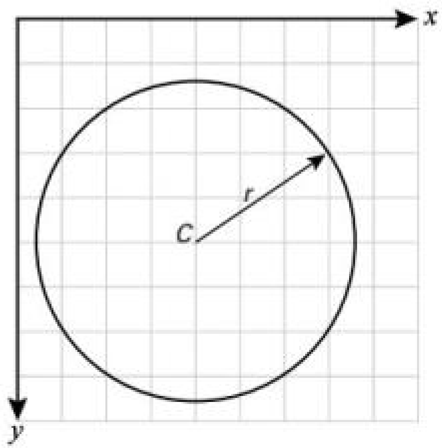


SOLUCIÓN

$$\left.\begin{array}{ll} \textbf{Centro:} & -h = 2 \Rightarrow h = -2 \\ & -h = 3 \Rightarrow k = 3 \end{array}\right\} C(-2, 3)$$

Radio: $r^2 = 4 \Rightarrow r = 2$

EJEMPLO 3 Determinar la ecuación de la circunferencia cuyo centro es el punto $(4, -5)$ y que pasa por $(7, -3)$.



SOLUCIÓN

Para determinar la ecuación, necesitamos el centro y el radio; este último es la distancia del centro $(4, -5)$ al punto por el que pasa $(7, -3)$.

$$r^2 = (7 - 4)^2 + [-3 - (-5)]^2 = 3^2 + 2^2 = 13$$

La ecuación buscada es entonces:

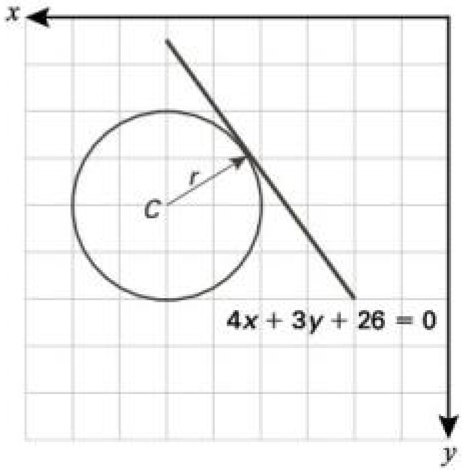
$$(x - 4)^2 + [y - (-5)]^2 = 13$$

$$(x - 4)^2 + (y + 5)^2 = 13 \qquad \text{Ecuación normal}$$

$$x^2 + y^2 - 8x + 10y + 28 = 0. \qquad \text{Ecuación general}$$

EJEMPLO 4

Encontrar la ecuación de la circunferencia cuyo centro se halla en el punto $(-6, -4)$ y que es tangente a la recta $4x + 3y + 26 = 0$.



SOLUCIÓN

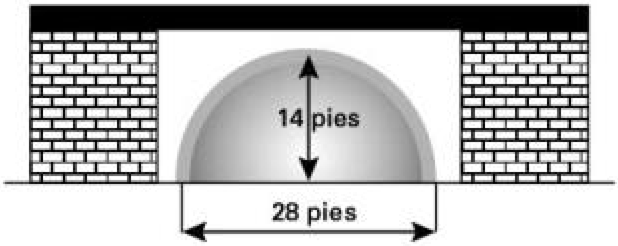
Cuando una circunferencia es tangente a una recta, su radio es perpendicular a la recta; por tanto, el radio es la distancia del centro a $4x + 3y + 26 = 0$.

$$r = \left| \frac{4(-6) + 3(-4) + 26}{\sqrt{4^2 + 3^2}} \right| = \left(\frac{10}{\sqrt{25}} \right)^2 = 2 \Rightarrow r^2 = 4$$

La ecuación buscada es: $(x + 6)^2 + (y + 4)^2 = 4$

$$x^2 + y^2 + 12x + 8y + 48 = 0$$

EJEMPLO 5 Un camión de 7 pies de ancho y 13 pies de altura se acerca al arco semicircular mostrado en la figura. La base del arco mide 28 pies de ancho y el camino bajo él está dividido, lo que posibilita el tránsito en los dos sentidos.



a) Escribir una ecuación, considerando que el centro es el origen $C(0, 0)$, que represente la forma del arco.

b) Si el camión permanece justo a la derecha de la mediana, ¿será posible que pase bajo el arco sin dañarlo?

SOLUCIÓN

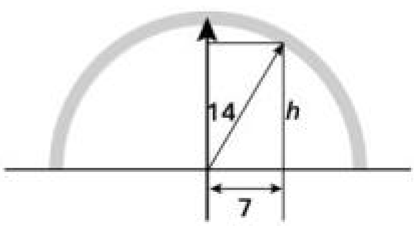
a) Ecuación $(x - 0)^2 + (y - 0)^2 = (14)^2$

$$x^2 + y^2 = 196$$

$$x^2 + y^2 - 196 = 0$$

b) Sí se daña, porque el camión puede considerarse un rectángulo de 7 pies de ancho por 13 de altura, entonces, la distancia h de la figura debería ser por lo menos igual a 13 pies para que el camión pase justo a la derecha de la mediana del camino.

$$h = \sqrt{14^2 - 7^2} = 12.12$$



EJERCICIO 1

Escribe la ecuación ordinaria de la circunferencia con centro en el punto $C(5, 2)$ y radio $r = 3$.

EJERCICIO 2

Halla la ecuación de la circunferencia que tiene su centro en el punto $C(-1, -1)$ y su radio es $r = \sqrt{8}$.

Ejercicio 3

¿Cuáles son el centro y el radio de cada una de las siguientes circunferencias?

a) $(x + 3)^2 + (y - 20)^2 = 4$ .... $C(\quad)$, $r =$

b) $x^2 + y^2 = 12$ .... $C(\quad)$, $r =$

c) $x^2 + (y - 5)^2 = 36$ .... $C(\quad)$, $r =$

d) $(x + 4)^2 + y^2 = 4$ .... $C(\quad)$, $r =$

Ejercicio 4

Halla la ecuación de la circunferencia cuyo diámetro queda determinado por los puntos $(3, 2)$ y $(-1, -4)$.

Ejercicio 5

Escribe la ecuación de la recta tangente en el punto $A(1, 2)$ a la circunferencia con centro en $C(-3,\ -2)$ y grafícala.

Ejercicio 6

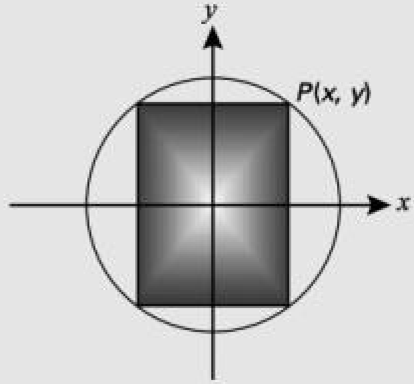
Escribe la ecuación de la circunferencia con centro en el punto $C(2, 0)$ y que es tangente a la recta $2x - 3y + 10 = 0$.

EJERCICIO 7

Un rectángulo se inscribe en un círculo con centro en (0, 0) y diámetro 12.

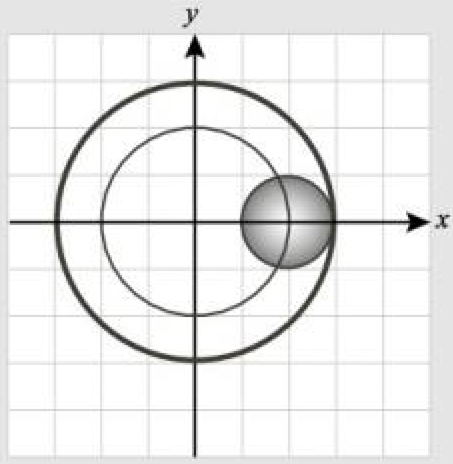
a) Escribe la ecuación del círculo que cumple estas condiciones.

b) Escribe el área A del rectángulo en términos de x.



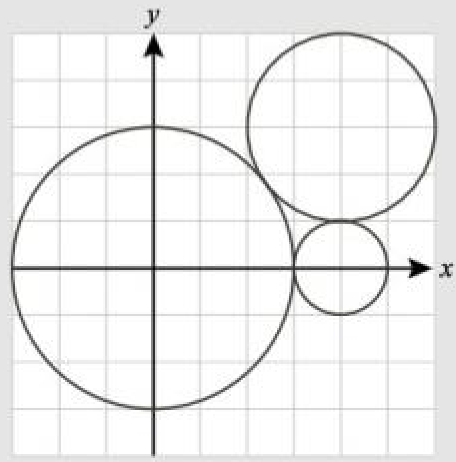
EJERCICIO 8

Las circunferencias de la figura representan un juego de un parque de diversiones, si la ecuación de la circunferencia mayor es $x^2 + y^2 = 36$. Encuentra las ecuaciones de las otras dos circunferencias.



Ejercicio 9

La figura muestra un mecanismo dentado. Escribe la ecuación de cada uno de los discos y halla su punto de contacto.



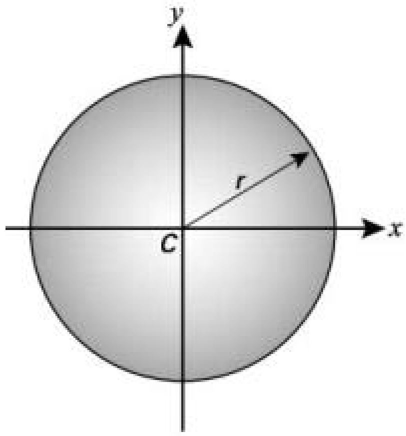
ECUACIÓN DE LA CIRCUNFERENCIA CON CENTRO EN EL ORIGEN

La ecuación de una circunferencia que tiene su centro en el origen es

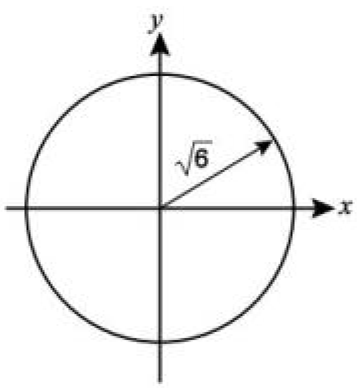
$$(x - 0)^2 + (y - 0)^2 = r^2$$

o, más sencillo,

$$x^2 + y^2 = r^2.$$



EJEMPLO 1 Hallar la ecuación de la circunferencia con centro en el origen y radio $r = \sqrt{6}$.



SOLUCIÓN

Basta con sustituir r por $\sqrt{6}$ en la ecuación $x^2 + y^2 = r^2$.

$$x^2 + y^2 = 6.$$

EJEMPLO 2 Determinar si el punto $(3, -1)$ pertenece a la circunferencia $x^2 + y^2 = 9$.

SOLUCIÓN

$(3)^2 + (-1)^2 \neq 9$ no es un punto de la circunferencia.

EJERCICIO 1

Halla la ecuación de la circunferencia con centro en el origen y radio $r = \dfrac{1}{3}$.

Ejercicio 2

Determina si el punto $(-3, 1)$ pertenece a la circunferencia $x^2 + y^2 = 10$.

Ejercicio 3

Escribe la ecuación de la circunferencia con centro en el origen y que pasa por el punto $(2, 3)$. Grafica.

ECUACIÓN GENERAL DE LA CIRCUNFERENCIA

Si desarrollamos la forma *canónica de la circunferencia*, $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$, obtenemos:

$$x^2 - 2hx + h^2 + y^2 - 2ky + k^2 = r^2$$

$$x^2 + y^2 - 2hx - 2ky + h^2 + k^2 - r^2 = 0.$$

Esta expresión genera una ecuación más sencilla que se conoce como la *forma general de la ecuación de la circunferencia* y se escribe de la siguiente manera:

$$\mathbf{x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0}$$

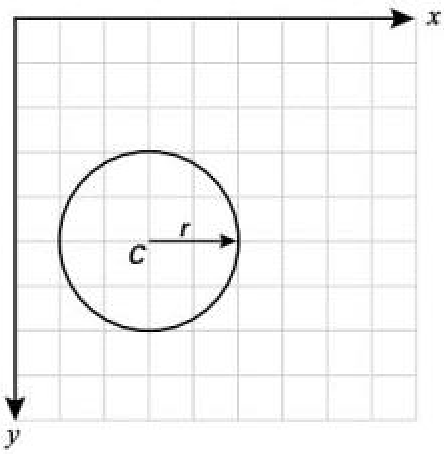
Para identificar el radio y el centro de una circunferencia cuya ecuación está en la forma general, basta con comparar las dos ecuaciones y resolverlas.

$$\left.\begin{aligned} D &= -2h \Rightarrow h -\frac{D}{2} \\ D &= -2h \Rightarrow h -\frac{E}{2} \end{aligned}\right\} \text{Las coordenadas del centro son } C\left(-\frac{D}{2}, -\frac{E}{2}\right).$$

$$F = h^2 + k^2 - r^2 \Rightarrow r^2 = h^2 + k^2 - F \quad \text{El radio al cuadrado es } r^2 = h^2 + k^2 - F.$$

EJEMPLO 1

Hallar el centro y el radio de la circunferencia $x^2 + y^2 - 6x + 10y + 30 = 0$ y graficarlos.



SOLUCIÓN

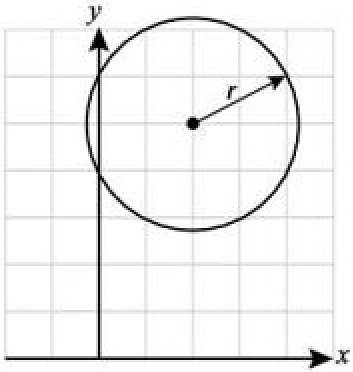
Aquí $D = -6, E = 10$ y $F = 30$

$$\left.\begin{aligned} h &= -\frac{D}{2} = -\frac{-6}{2} = 3 \\ k &= -\frac{E}{2} = -\frac{10}{2} = -5 \end{aligned}\right\} \text{Entonces, el centro está en } C(3, -5).$$

$$r^2 = (3)^2 + (-5)^2 - 30 = 4 \Rightarrow r = \sqrt{4} = 2.$$

EJEMPLO 2

Escribir la forma general de la circunferencia de centro $C(2, 5)$ y radio $r = \sqrt{5}$.



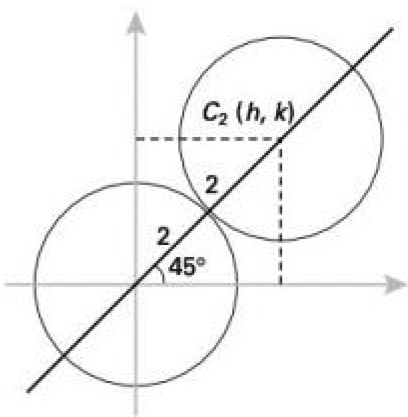
$$(x - 2)^2 + (y - 5)^2 = (\sqrt{5})^2$$

$$x^2 - 4x + 4 + y^2 - 10y + 25 = 5$$

$$x^2 + y^2 - 4x - 10y + 24 = 0.$$

EJEMPLO 3

Se colocan en un jardín dos aspersores alineados a 45°. Cada uno cubre sucesivamente sin traslaparse un radio de 2 m. Considerando el centro de uno de ellos en el origen



a) ¿Cuál es la ecuación de cada circunferencia?
b) ¿En qué punto se tocan las circunferencias?

SOLUCIÓN

Ecuación de la circunferencia con centro en el origen:

$$x^2 = y^2 = 4$$

El centro C_2 lo podemos obtener por construcción de la siguiente manera:

$$h = 4 \cos 45° = 2\sqrt{2} \quad \text{y} \quad k = 4 \operatorname{sen} 45° = 2\sqrt{2}.$$

El centro C_2 está en $(2\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$.

La ecuación es $(x - 2\sqrt{2})^2 + (y - 2\sqrt{2})^2 = (2)^2$

$$x^2 - 4\sqrt{2}x + 8 + y^2 - 4\sqrt{2}y + 8 = 4$$

$$x^2 + y^2 - 4\sqrt{2}x - 4\sqrt{2}y + 12 = 0.$$

Para conocer el punto de intersección, debemos resolver simultáneamente las dos ecuaciones. Sustituyendo la primera ecuación en la segunda, tenemos

$4 - 4\sqrt{2}x - 4\sqrt{2}\sqrt{4 - x^2} + 12 = 0$ Recuerda que $x^2 + y^2 = 4$ y $y = \sqrt{4 - x^2}$.

$-\sqrt{2}x - 4\sqrt{2}\sqrt{4 - x^2} + 4 = 0$ Se divide todo entre 4.

$\sqrt{4 - x^2} = -x + \dfrac{4}{\sqrt{2}}$ Se divide todo entre $\sqrt{2}$ y se trasponen términos.

$4 - x^2 = x^2 - 4\sqrt{2}x + 8$ Se elevan al cuadrado ambos lados.

$2x^2 - 4\sqrt{2}x + 4 = 0$ Se utiliza la fórmula general en su resolución.

$x = \dfrac{4\sqrt{2} \pm \sqrt{(4\sqrt{2}^2 - 4(2)(4))}}{2(2)} = \sqrt{2}$ En donde $y = \sqrt{4 - (\sqrt{2})^2} = \sqrt{2}$.

El punto de contacto está en $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$.

EJERCICIO 1

Escribe la ecuación general de la circunferencia $(x - 2)^2 + (y - 4)^2 = 3$.

Ejercicio 2

Escribe la ecuación general de la circunferencia $x^2 + (y - 3)^2 = 25$.

Ejercicio 3

Halla el centro y el radio de la circunferencia $x^2 + y^2 - 8x - 14y + 61 = 0$ y grafica.

EJERCICIO 4

Encuentra el centro y el radio de la circunferencia $x^2 + y^2 + 10y = 0$. Grafícala.

EJERCICIO 5

Halla el centro y el radio de la circunferencia $x^2 + y^2 - 12x - 13 = 0$. Grafícala.

Ejercicio 6

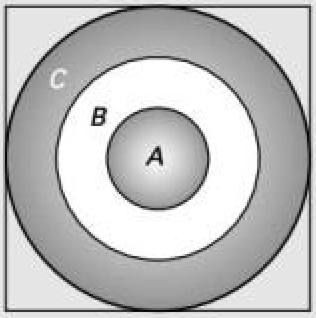
Explica la diferencia entre las circunferencias $x^2 + y^2 - 6x + 2y - 15 = 0$ y $x^2 + y^2 + 2x - 6y - 15 = 0$, y grafícala.

Ejercicio 7

Escribe la ecuación de la circunferencia que pasa por $(-8, 3)$ y cuyo centro es el punto de intersección de las rectas $x - y + 3 = 0$ y $x + 2y - 12 = 0$.

EJERCICIO 8

Los círculos mostrados en la figura son concéntricos, están igualmente espaciados y sirven para practicar tiro al blanco. El círculo mayor tiene un diámetro de 24 pulgadas.



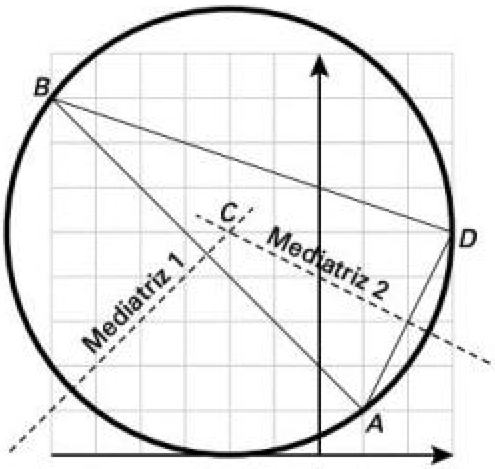
a) Escribe una ecuación que represente el círculo mayor si el centro es el origen.

b) El círculo menor se representa mediante la ecuación $x^2 + y^2 = 6.25$. Determina el área de la región B.

ECUACIÓN DE LA CIRCUNFERENCIA QUE PASA POR TRES PUNTOS

Encontrar los elementos y la ecuación de una circunferencia que pasa por tres puntos es un ejercicio común en la geometría analítica. Aquí te presentamos un caso y el método de solución.

EJEMPLO 1 Hallar la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos $A(1, 1)$, $B(-6, 8)$ y $D(3, 5)$.



Solución simultánea de las mediatrices

$$\begin{array}{r} x - y + 7 = 0 \\ -x - 2y - 8 = 0 \\ \hline -3y - 15 = 0 \end{array}$$

$$y = \frac{15}{3} = 5 = k \qquad x = y - 7 = -2 = h$$

SOLUCIÓN

Uno de los métodos consiste en encontrar las ecuaciones de dos de las mediatrices del triángulo formado por los tres puntos, y resolverlas simultáneamente para encontrar el centro. El radio, evidentemente, es la distancia que hay entre el centro y un vértice del triángulo.

$$m_{AB} = \frac{8-1}{-6-1} = \frac{7}{-7} = -1, \qquad \text{entonces} \qquad m_{\text{mediatriz 1}} = -\frac{1}{-1} = 1.$$

El punto medio del lado AB es $x = -\dfrac{5}{2}$ y $y = \dfrac{9}{2}$.

Ecuación de la mediatriz 1 $y - \dfrac{9}{2} = 1\left(x + \dfrac{5}{2}\right)$

$x - y + 7 = 0$ Al simplificar.

$$m_{AD} = \frac{5 - 1}{3 - 1} = \frac{4}{2} = 2, \quad \text{entonces} \quad m_{\text{mediatriz 2}} = -\frac{1}{2}$$

El punto medio del lado AD es $x = 2$ y $y = 3$

Ecuación de la mediatriz 1 $y - 3 = -\frac{1}{2}(x - 2)$

$$x + 2y - 8 = 0 \quad \text{Al simplificar.}$$

Por lo tanto, las coordenadas del centro de la circunferencia están en $C(-2, 5)$.

El radio $r^2 = (d_{AC})^2 = (-2 - 1)^2 + (5 - 1)^2 = 25$.

La ecuación buscada es

$$(x + 2)^2 + (y - 5)^2 = 25 \quad \text{En su forma canónica o normal.}$$

$$x^2 + 4x + 4 + y^2 - 10y + 25 = 25$$

$$x^2 + y^2 + 4x - 10y + 4 = 0 \quad \text{Escrita en su forma general.}$$

Otro método de solución para encontrar la ecuación de la circunferencia dadas tres condiciones es considerar que las coordenadas de los tres puntos conocidos deben satisfacer la forma general.

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$$

es decir, se sustituyen x y y en esta ecuación por sus respectivos valores y, finalmente, se determinan los coeficientes D, E y F. Analiza y completa la siguiente secuencia para que comprendas mejor este método de solución.

Condición: $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$

$A(1, 1)$ $\quad (1)^2 + (1)^2 + D(1) + E(1) + F = 0$ Se sustituyen las coordenadas.

$$D + E + F = -2 \quad \text{Se reducen los términos.}$$

$$\boxed{F = -2 - D - E} \quad \text{Se despeja } F.$$

Ahora realiza las mismas operaciones con el punto $B(-6, 8)$.

$B(-6, 8)$ $\quad (\quad)^2 + (\quad)^2 + D(\quad) + E(\quad) + F = 0.$

$$-6D + 8E + F = -100$$

$$-6D + 8E + \boxed{} F = -100 \quad \text{Se sustituye el valor de } F.$$

$$-D + E = -14 \quad \text{Se simplifican y reducen términos.}$$

$C(3,5)\quad (\quad)^2 + (\quad)^2 + D(\quad) + E(\quad) + F = 0.$

$$3D + 5E + \boxed{} = -34 \quad \text{Se sustituye el valor de } F.$$

$$D + 2E = -16 \qquad \text{Se simplifican y reducen términos.}$$

Para encontrar los valores de D y E, resolvemos simultáneamente las ecuaciones $-D + E = -14$ y $D + 2E = -16$.

$$\begin{array}{rcl} -D + E &=& -14 \\ D + 2E &=& -16 \\ \hline 3E &=& -30 \end{array} \qquad \text{Se despejan} \qquad \begin{array}{l} D = 14 + E \\ D = 14 - 10 = 4 \end{array}$$

luego, $F = -D - E - 2$

en donde $E = \dfrac{-30}{3} = -10$ y $F = -4 - (-10) - 2 = 4.$

Con los valores de $D = 4$, $E = -10$ y $F = 4$ obtenemos la ecuación general de la circunferencia buscada

$$x^2 + y^2 + 4x - 10y + 4 = 0$$

El centro, el radio y la gráfica los obtenemos como vimos anteriormente.

Ejercicio 1

Halla la ecuación de la circunferencia circunscrita al triángulo cuyos vértices son $A(1, 3)$, $B(-1, 5)$ y $D(-3, 3)$.

EJERCICIO 2

Encuentra la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos $(3, 5)$, $(-1,1)$ y $(5, -3)$.

EJERCICIO 3

Escribe la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos de intersección de las rectas $3x - y = 7$, $x - 2y = 4$ y $2x + y = 8$.

EJERCICIO 4

Prueba que la ecuación de la circunferencia que pasa por $(3, -8)$, $(-3, 10)$ y $(-7, 2)$ es concéntrica a la circunferencia $x^2 + y^2 - 6x - 4y + 9 = 0$.

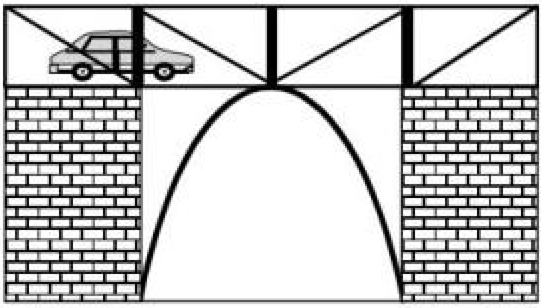
UNIDAD

4

LA PARÁBOLA

PARÁBOLA

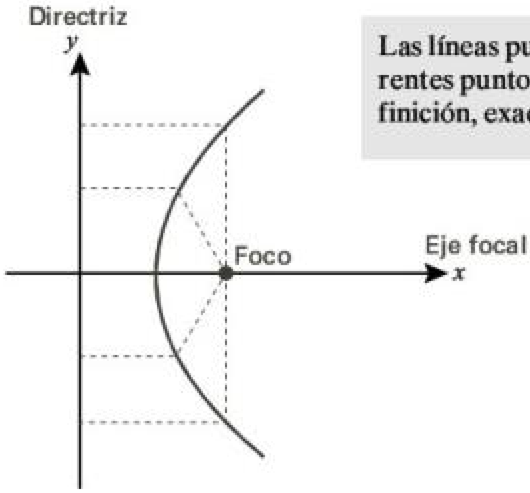
Ahora estudiaremos otra curva de gran relevancia en las matemáticas y para el conocimiento en general, ya que tiene innumerables aplicaciones prácticas y científicas: *la parábola*.



Así como en la circunferencia, estudiaremos las propiedades algebraicas y geométricas de la parábola, para finalmente ver algunas de sus aplicaciones.

PARÁBOLA

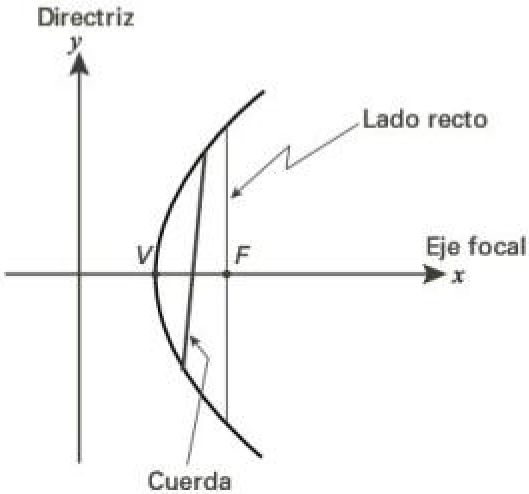
Una *parábola* es el lugar geométrico de un conjunto de puntos en el plano, de tal manera que la distancia de cualquiera de ellos a una recta fija (*directriz*) siempre es igual a su distancia de un punto fijo (*foco*).



Las líneas punteadas que coinciden en diferentes puntos de la parábola miden, por definición, exactamente lo mismo.

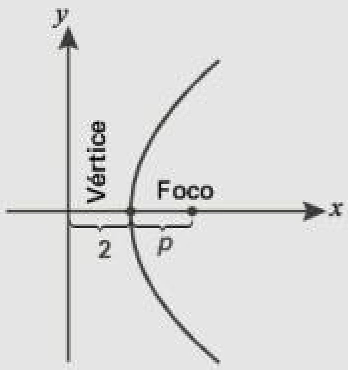
ELEMENTOS DE LA PARÁBOLA

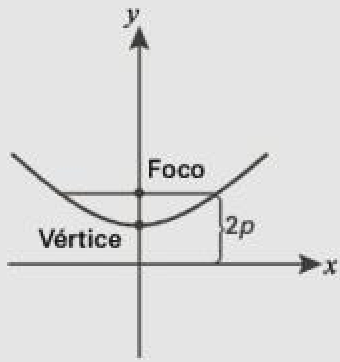
Vértice Es el punto donde se cortan la parábola y su eje.
Foco Es el punto fijo al que hace referencia la definición.
Cuerda Es una recta que une dos puntos de la parábola.
Lado recto Es una cuerda que pasa por el foco y es perpendicular al eje focal.
Eje focal Recta que pasa por el foco y el vértice.
Directriz Recta fija que sirve para definir la parábola.



EJERCICIO

En cada una de las figuras, proporciona el valor de p.

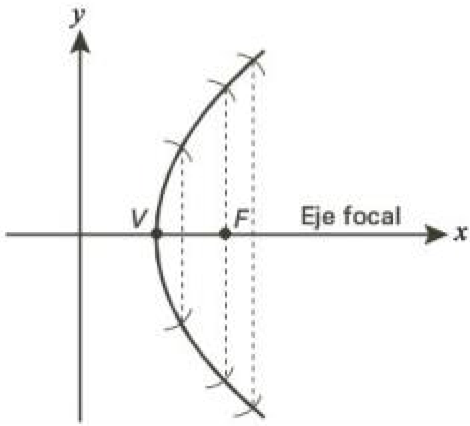




CONSTRUCCIÓN DE LA PARÁBOLA

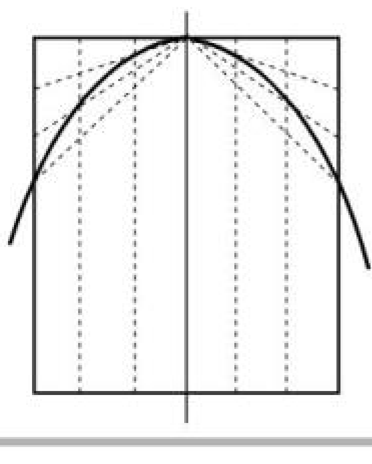
Existen varios métodos para trazar parábolas, aquí se muestran dos que tienen el mismo principio.

Se trazan líneas paralelas a la directriz y hacia el foco (como en la figura), y se corta cada una con dos arcos, que se trazan haciendo centro en el foco, con una abertura igual a la distancia de esa línea a la directriz.



Otro método consiste en trazar, en forma simétrica, líneas paralelas a los lados de un rectángulo como el de la figura.

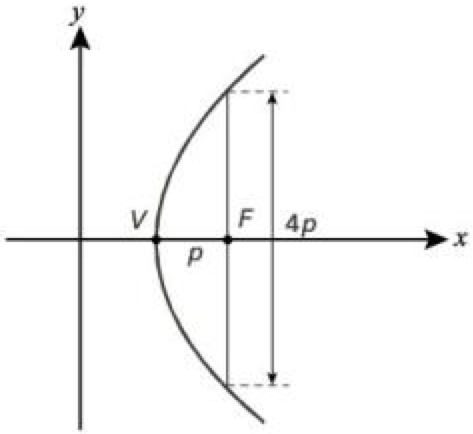
En las intersecciones de los segmentos igualmente espaciados resultan puntos que pertenecen a una parábola.



PROPIEDADES DE LA PARÁBOLA

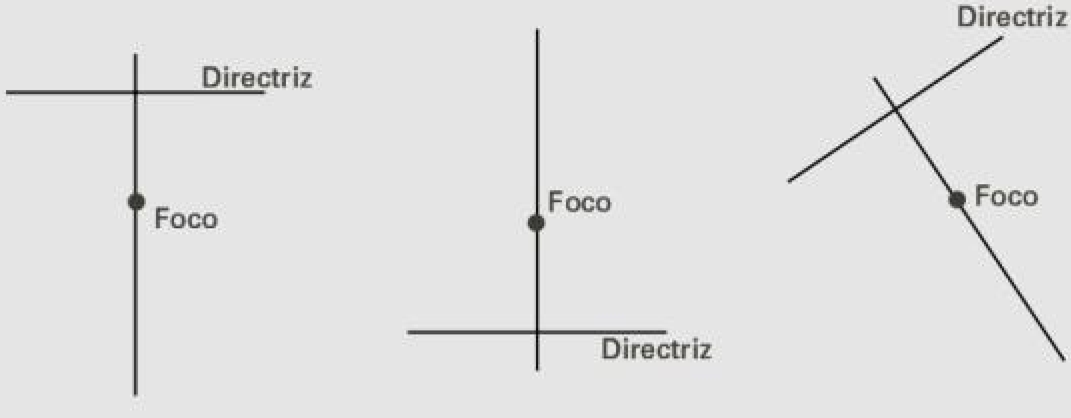
La distancia del vértice al foco es un parámetro que llamaremos p.

La longitud del *lado recto* es el valor absoluto de $4p$.



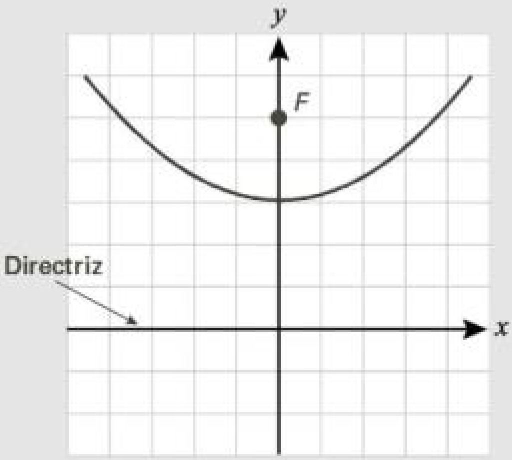
EJERCICIO 1

Las figuras siguientes sugieren únicamente el foco y la directriz; traza la parábola respectiva dibujando el vértice y el lado recto. Utiliza tu juego de geometría.

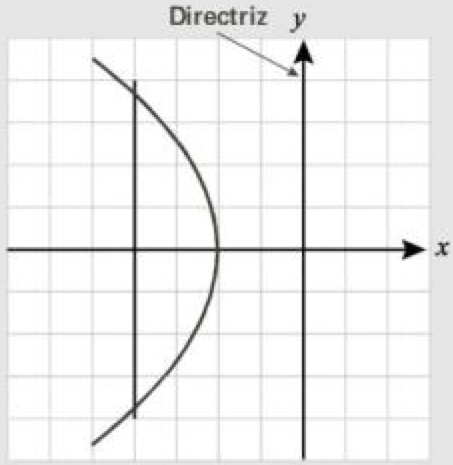


EJERCICIO 2

En las gráficas mostradas a continuación, sitúa correctamente el elemento indicado.



Dibujar el lado recto

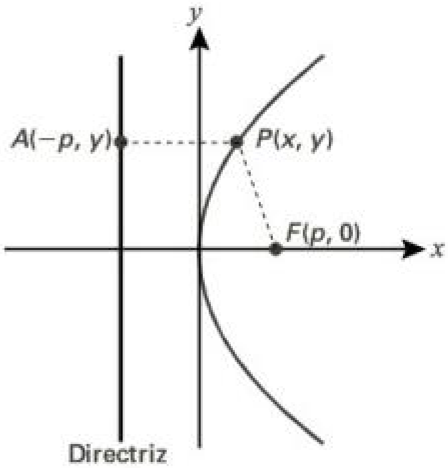


Marcar el foco

ECUACIÓN DE LA PARÁBOLA CON VÉRTICE EN EL ORIGEN

En esta sección veremos que la ecuación de la parábola toma su forma más sencilla cuando su vértice coincide con el origen de las coordenadas cartesianas y el eje focal con alguno de los ejes coordenados.

En la figura, por definición de parábola, tenemos



$$|AP| = |FP|$$

$$|x - (-p)| = \sqrt{(x - p)^2 + (y - 0)^2}$$

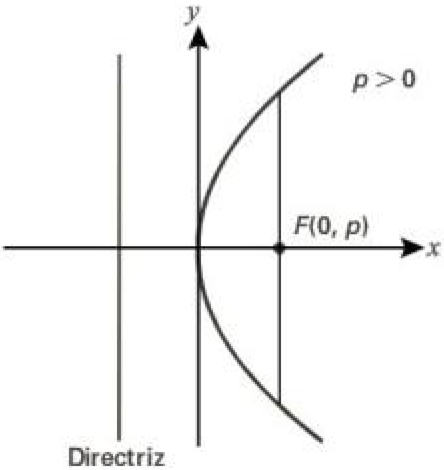
$$(x + p)^2 = (x - p)^2 + (y - 0)^2 \qquad \text{Se eleva al cuadrado.}$$

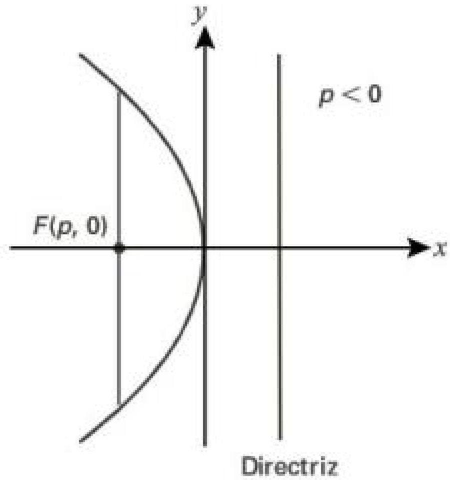
$$y^2 = 4px \qquad \text{Se reduce la igualdad.}$$

La expresión $y^2 = 4px$ representa, por lo tanto, la ecuación de una parábola con vértice en el origen, en la que su eje coincide con el eje x y que, además, abre hacia la derecha $p > 0$. Si abre a la izquierda $p < 0$.

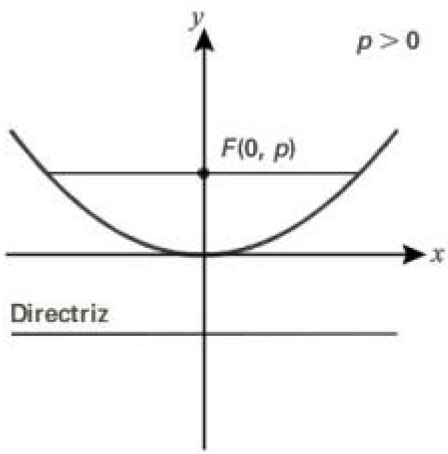
Siguiendo el método anterior, podemos demostrar las ecuaciones y propiedades de la parábola que resumimos enseguida.

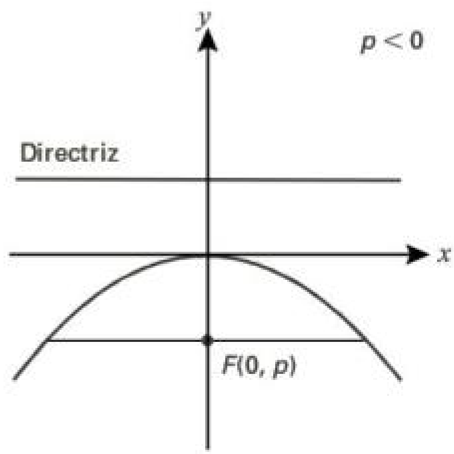
Parábola cuyo eje focal coincide con el eje x		
Ecuación	Directriz	Lado recto
$y^2 = 4px$	$x = -p$	$\|4p\|$



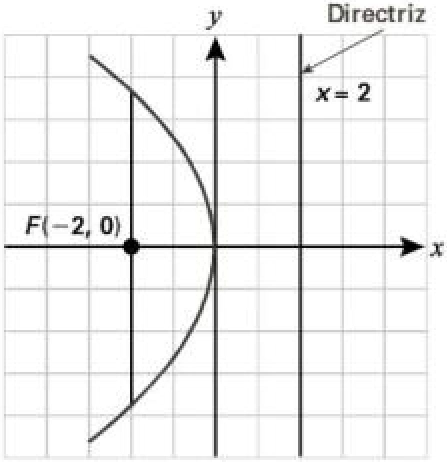


Parábola cuyo eje focal coincide con el eje y		
Ecuación	Directriz	Lado recto
$y^2 = 4px$	$x = -p$	$\|4p\|$





EJEMPLO 1 Hallar la ecuación, los elementos y la gráfica de la parábola con vértice en el origen y foco en el punto $(-2, 0)$.



SOLUCIÓN

La ecuación corresponde a $y^2 = 4px;$

por lo tanto, es $y^2 = 4(-2)x = -8x$

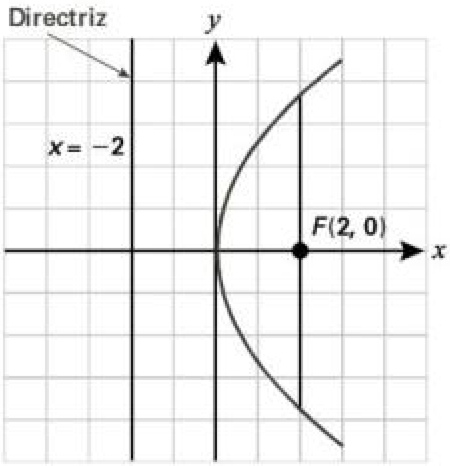
$y^2 = -8x$

Directriz; $x = -(-2) = 2$

$x = 2$

Lado recto; $L.R. = |4(-2)| = 8$

EJEMPLO 2 Encontrar los elementos y la gráfica de la parábola $y^2 = 8x$.



SOLUCIÓN

La ecuación $y^2 = 8x$

es de la forma $y^2 = 4px;$

por lo tanto, $4p = 8,$

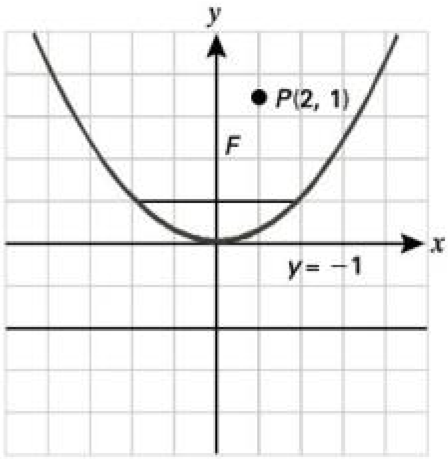
en consecuencia, $p = 2,$

lo cual significa que el foco tiene coordenadas $F(2, 0)$.

La directriz es $x = -2.$

El lado recto, $L.R. = |8| = 8$

EJEMPLO 3 Encontrar la ecuación de la parábola de vértice en el origen, eje focal en el eje y y que pasa por el punto (2, 1).



SOLUCIÓN

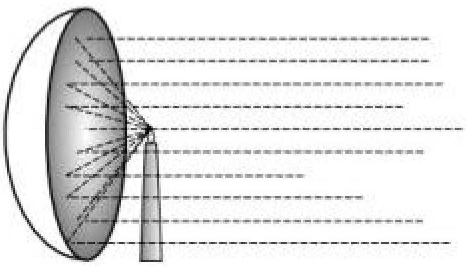
Como el punto (2, 1) pertenece a la parábola, estas coordenadas deben satisfacer la ecuación $x^2 = 4py$; por lo tanto, $(2)^2 = 4p(1) \Rightarrow p = 1$. Así, la ecuación de la parábola es

$$x^2 = 4(1)y \quad \text{o} \quad x^2 = 4y.$$

Directriz: $y = -1$

$$L.R. = |4(1)| = 4$$

EJEMPLO 4 En el siglo XVI, podía encenderse una vela con rayos solares mediante un espejo parabólico como el que se muestra en la figura. Suponiendo que la vela está situada precisamente en el foco y que el espejo tiene 40 cm de diámetro, ¿a qué distancia del fondo del espejo debe estár situada la vela?



SOLUCIÓN

Es evidente que el lado recto mide 40 cm; por lo tanto, si la vela está en el foco, lo que buscamos es la distancia p:

$$4p = 40 \Rightarrow p = 10$$

La vela está situada a10 cm del fondo del espejo.

EJERCICIO 1

Rellena el círculo que corresponda a una ecuación de parábola con vértice en el origen.

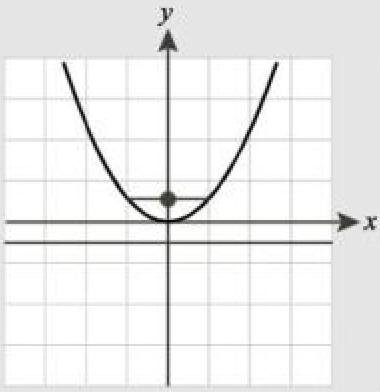
○ $y = x^2$ ○ $x = 6y^2$ ○ $x = -12y^2$

○ $x + y = 2$ ○ $x^2 + y^2 = 4$

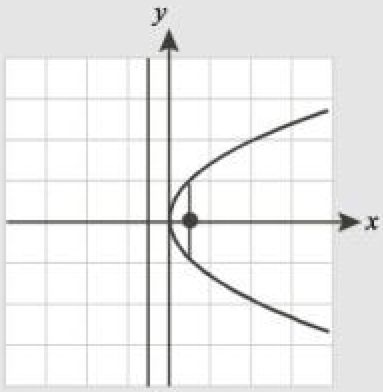
Ejercicio 2

Asocia cada ecuación con la gráfica que le corresponde:

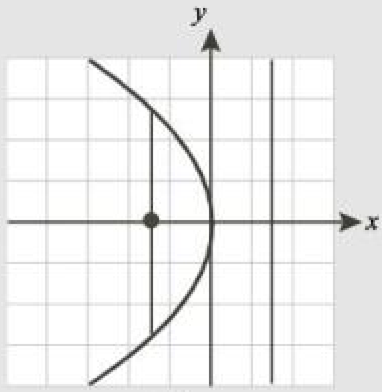
a) $x^2 = 2y$ con ________ **b)** $y^2 = -6$ con ________ **c)** $y^2 = 2x$ con ________



I



II



III

Ejercicio 3

Halla la ecuación de la parábola con vértice en el origen y foco en el punto $(-2,0)$.

EJERCICIO 4

Halla la ecuación de la parábola cuyo vértice está en el origen y su directriz es la recta $x = -3$.

EJERCICIO 5

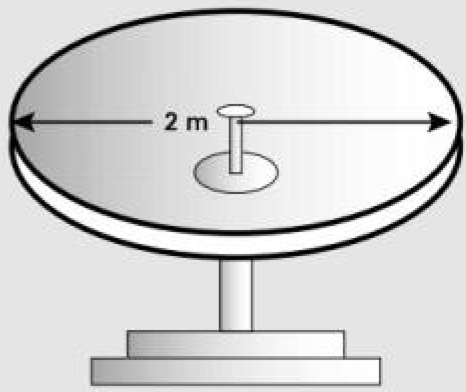
La directriz de una parábola es $y = -2$ y su foco está en $F(0, 2)$. Grafica y obtén su ecuación.

EJERCICIO 6

Encuentra los elementos y la ecuación de la parábola vertical con centro en el origen y que pasa por el punto $P(1, -2)$.

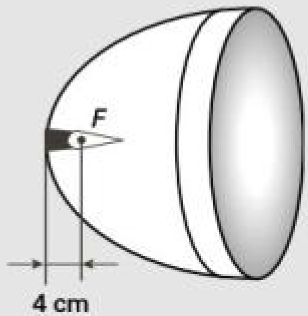
EJERCICIO 7

La antena parabólica mostrada tiene 2 m de ancho en la parte donde está situado su aparato receptor de señales. ¿A qué distancia del fondo de la antena está situado dicho receptor? Escribe la ecuación correspondiente a la sección parabólica de esta antena.



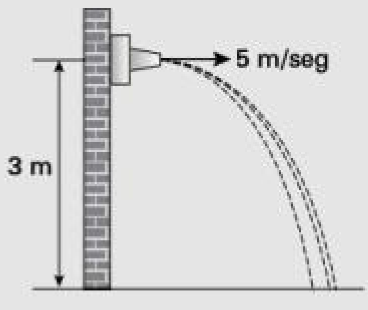
EJERCICIO 8

La figura muestra la distancia a la cual se halla el foco de luz en el faro de un automóvil. ¿Cuál es el ancho que tiene el faro al nivel del foco de iluminación? Describe la ecuación de la forma parabólica del faro.



EJERCICIO 9

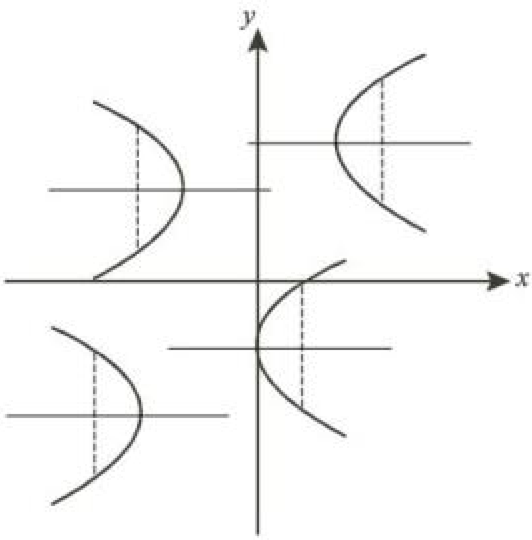
El orificio por donde sale el agua de la lluvia se llama gárgola y está situado a 3 m del suelo; la velocidad con la que expulsa el agua es de 5 m/seg. ¿A qué distancia del muro caerá el agua al llegar a la tierra? Escribe la ecuación de la trayectoria del agua.

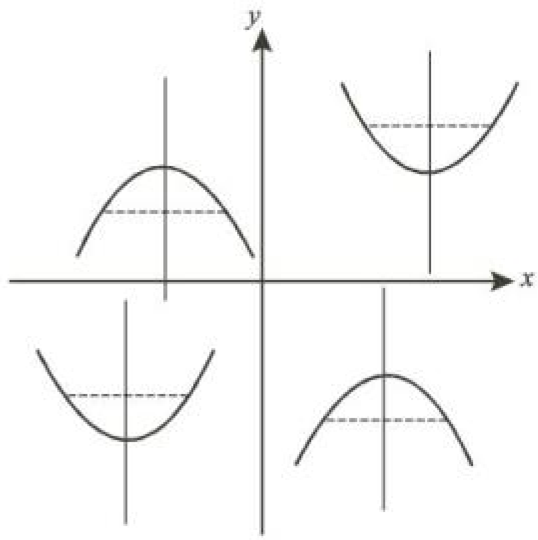


PARÁBOLA CON VÉRTICE FUERA DEL ORIGEN

La parábola, por diversas circunstancias, también puede presentarse con el vértice en $V(h, k)$ y su eje focal paralelo a cualquiera de los ejes coordenados (véanse figuras de abajo). Para encontrar la ecuación respectiva, en las ecuaciones básicas debemos cambiar x por $\boldsymbol{x - h}$ y y por $\boldsymbol{y - k}$. Por lo tanto, las ecuaciones y los elementos de la parábola quedarían de la siguiente manera:

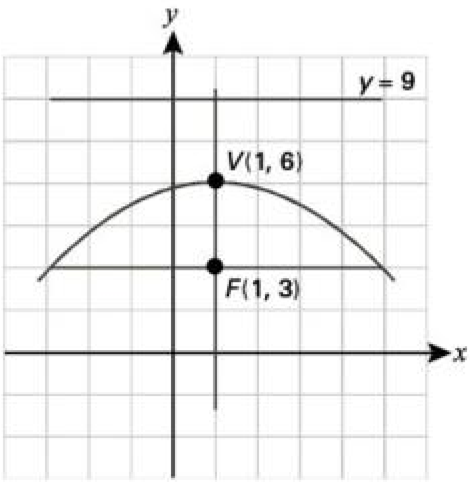
Parábola con vértice $V(h, k)$ y eje focal paralelo a x:			Parábola con vértice $V(h, k)$ y eje focal paralelo a y:		
Ecuación	Foco	Directriz	Ecuación	Foco	Directriz
$(y - k)^2 = 4p(x + h)$	$[(h + p), k]$	$x = h - p$	$(x - h)^2 = 4p(y - k)$	$[h(k + p)]$	$y = k - p$





EJEMPLO 1

Hallar la ecuación de la parábola de vértice en el punto $V(1, 6)$ y foco $F(1, 3)$. Describir los elementos faltantes, incluyendo su gráfica.



SOLUCIÓN

Si señalamos el vértice y el foco en la gráfica, nos daremos cuenta de que es una parábola con su eje paralelo a y y que, además, abre hacia abajo. Entonces, $p = -3$ y su ecuación es

$$(x - 1)^2 = 4(-3)(y - 6)$$

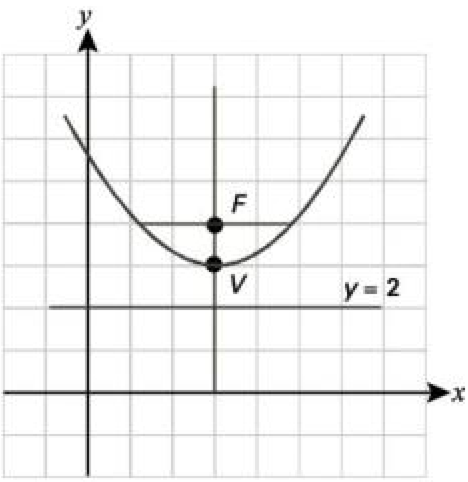
$$x^2 - 2x + 1 = -12y + 72$$

$$x^2 - 2x + 12y - 71 = 0.$$

Directriz: $y = 6 - (-3) = 9$ $L.R. = |4(-3)| = 12$

EJEMPLO 2

Escribir la ecuación de la parábola cuya directriz es la recta $y = 2$ y su foco es el punto $F(3, 4)$.



SOLUCIÓN

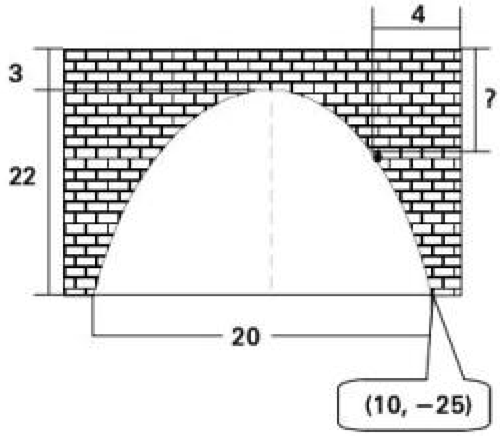
Situar el vértice es relativamente fácil, ya que —por los datos dados— sabemos que es una parábola con eje paralelo a y; por lo tanto, su vértice está entre el foco y la directriz, en $V(3, 3)$, $p = 1$, porque la curva abre hacia arriba. La ecuación será entonces

$$(x - 3)^2 = 4(1)(y - 3)$$

$$x^2 - 6x + 9 = 4y - 12$$

$$x^2 - 6x - 4y + 21 = 0 \qquad L.R. = |4(1)| = 4$$

EJEMPLO 3 La figura representa un puente que está sobre el río Sena, por donde navegan las embarcaciones. ¿A qué altura hacia abajo del puente se encuentra el punto del arco que dista 4 m de uno de los pilares?



SOLUCIÓN

Si las coordenadas del vértice del arco parabólico las situamos en $V(0,\ -3)$, entonces su ecuación es

$$(x - 0)^2 = 4p[y - (-3)]$$

$x^2 = 4p(y + 3)$. Al sustituir un punto, por ejemplo $(10, -25)$, tendremos el valor de $4p$.

$$(10)^2 = 4p(-25 + 3), \text{entonces}$$

$$4p = -\frac{100}{22} = -\frac{50}{11}.$$

Para conocer la distancia que buscamos, sustituimos en la ecuación de la parábola el valor de $x = 6$; de manera que

$4p = -\dfrac{50}{11}$, y luego despejamos y

$(6)^2 = -\dfrac{50}{11}(y + 3) \Rightarrow y = -10.92$; por lo tanto, la distancia buscada es

$|-10.92| = 10.92$ m.

Sugerencia: Resuelve el ejemplo considerando el vértice en $(0, 0)$.

Ejercicio 1

En cada una de las siguientes parábolas, indica hacia dónde abren y si su eje focal es paralelo a x o a y.

a) $(x - 3)^2 = 6(y - 2)$ ____________________

b) $(y + 1)^2 = -(x - 2)$ ____________________

c) $(x + 12)^2 = -5(y + 1)$ ____________________

d) $y^2 = x - 8$ ____________________

e) $y^2 = 28x$ ____________________

f) $(x - 5)^2 = 4y$ ____________________

Ejercicio 2

Con los datos siguientes, dibuja la parábola correspondiente en cada inciso.

a) $V(4, 3)$, directriz: $y = -2$ **b)** $V(2, -1)$ y $F(4, 1)$ **c)** $F(3, -3)$, directriz: $x = -1$

Ejercicio 3

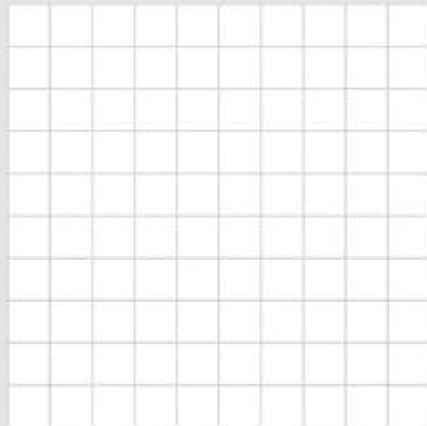
Halla la ecuación de la parábola con vértice en el punto $V(1,1)$ y directriz $x = 3$. Grafícala.

Ejercicio 4

Escribe la ecuación de la parábola cuyo foco es el punto $F(3, 5)$ y vértice el punto $V(3, 2)$. Grafícala.

EJERCICIO 5

Halla la ecuación de la parábola cuyo foco es el punto $F(1, 1)$ y directriz $y = \frac{5}{2}$. Grafícala.

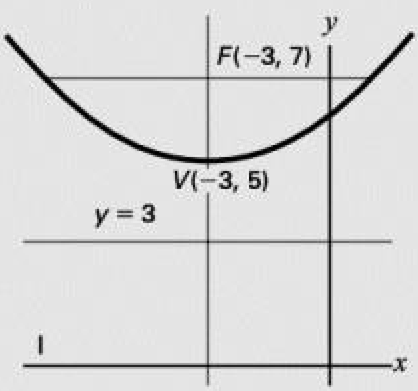


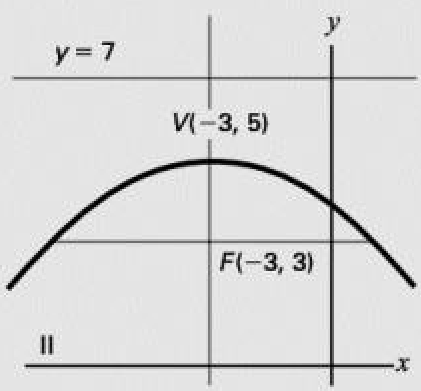
EJERCICIO 6

Asocia cada ecuación con su gráfica.

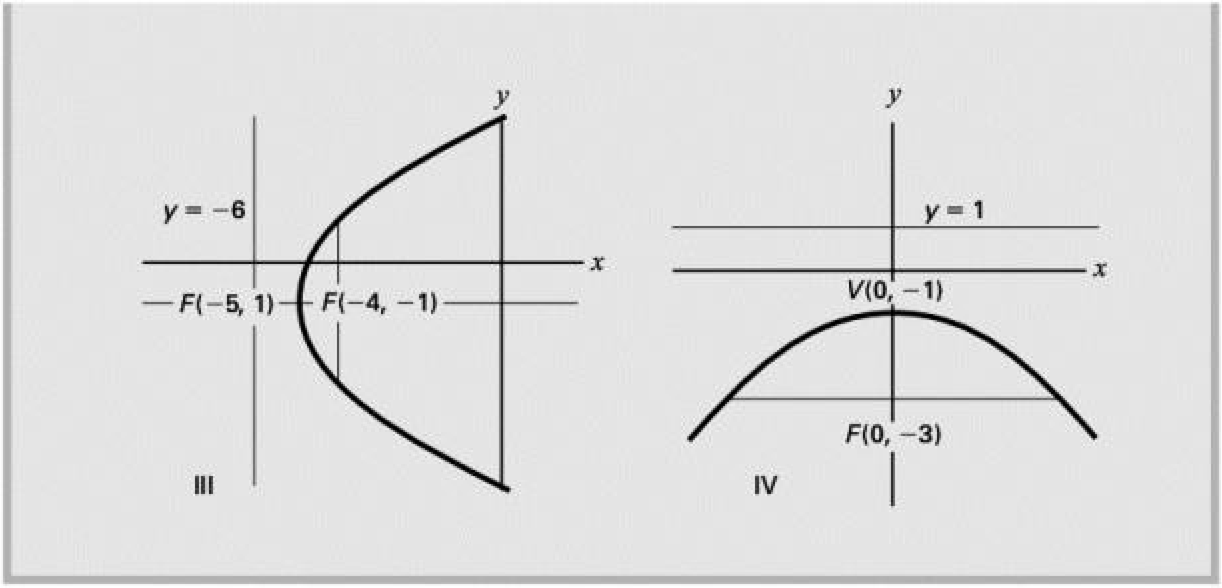
a) $(x + 3)^2 = 8(y - 5)$ **c)** $(x + 3)^2 = -8(y - 5)$

b) $(y + 1)^2 = 4(x + 5)$ **d)** $x^2 = -8(y + 1)$





(Continúa)


y
y = −6
x
F(−5, 1)
F(−4, −1)
III
y
y = 1
x
V(0, −1)
F(0, −3)
IV

ECUACIÓN GENERAL DE LA PARÁBOLA

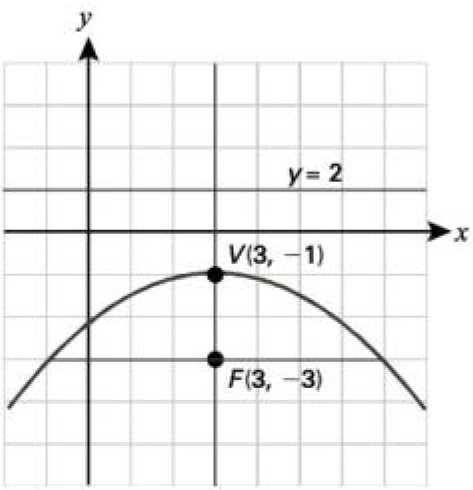
Cuando desarrollamos la *forma ordinaria* de la parábola, se puede presentar de dos maneras:

$$x^2 + Dx + Ey + F = 0, \quad \text{o bien,} \quad y^2 + Dy + Ex + F = 0.$$

A estas formas se les conoce como *forma general de la ecuación de la parábola.*

Ahora demostraremos cómo, si se conoce la *forma general*, se puede pasar a su *forma ordinaria* con tan sólo efectuar el procedimiento inverso.

EJEMPLO 1 Encontrar los elementos y la gráfica de la parábola $x^2 - 6x + 8y + 17 = 0$.



SOLUCIÓN

$x^2 - 6x + 8y + 17 = 0$

$x^2 - 6x = -8y + 17$ — Se agrupan los términos de x a un lado de la ecuación y los de y en el otro.

$x^2 - 6x + 3^2 = -8y + 17 + 3^2$ — Se completa el trinomio cuadrado en la variable que está al cuadrado.

$(x - 3)^2 = -8y - 8$

$(x - 3)^2 = -8(y + 1)$ — Se simplifica y factoriza.

$-h = -3 \Rightarrow h = 3$ y $-k = 1 \Rightarrow k = -1.$

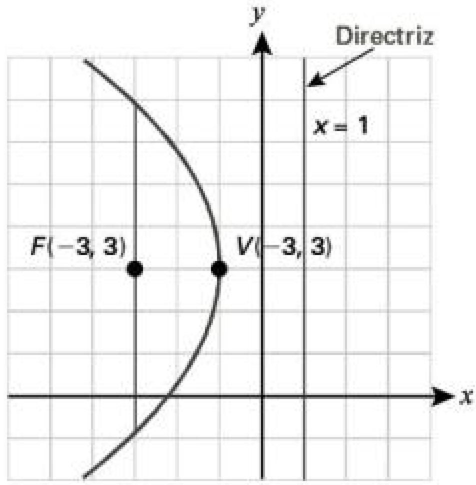
El vértice está en $V(3, -1)$.

$4p = -8 \Rightarrow p = -2,$

lo que significa que la parábola abre hacia abajo y el foco es $F(3, -3)$.

Directriz: $y = 1$.

EJEMPLO 2 Encontrar los elementos y la gráfica de la parábola $y^2 - 6y + 8x + 17 = 0$.



SOLUCIÓN

$y^2 - 6y + 8x + 17 = 0$

$y^2 - 6y = -8x - 17$ Se agrupan los términos de x a un lado de la ecuación y los de y al otro.

$y^2 - 6y + 3^2 = -8x - 17 + 3^2$ Se completa el trinomio cuadrado en la variable que está al cuadrado.

$(y - 3)^2 = -8x - 8$

$(y - 3)^2 = -8(x + 1)$ Se simplifica y factoriza.

$-h = 1 \Rightarrow h = -1$ y $-k = -3 \Rightarrow k = 3$.

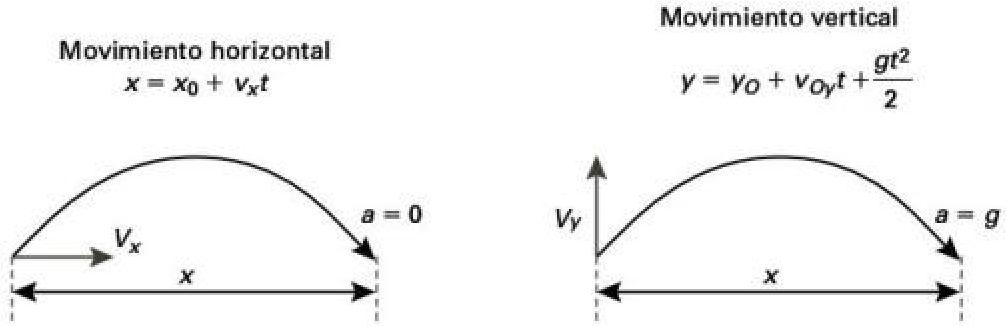
El vértice está en $V(-1, 3)$.

$4p = -8 \Rightarrow p = -2$.

La parábola abre hacia la izquierda y el foco es $F(-3, 3)$, la directriz es $x = 1$.

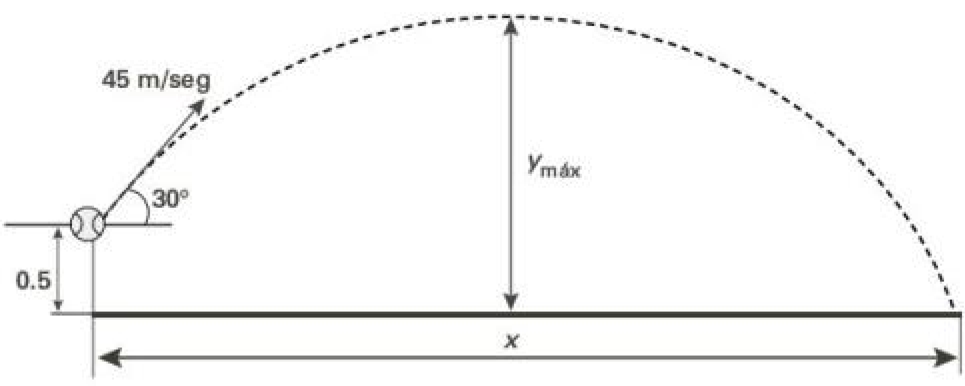
TRAYECTORIAS PARABÓLICAS

En física, una de las aplicaciones más importantes de las parábolas se da en los objetos que siguen un curso parabólico. Recordemos que en un tiro parabólico se deben analizar dos movimientos: uno horizontal y otro vertical.



EJEMPLO 1

Un jugador de beisbol batea un lanzamiento a 50 cm del piso, con un ángulo de 30° y una velocidad de 45 m/seg. ¿Cuáles son la máxima altura y la distancia horizontal que alcanza la pelota antes de tocar el piso?



SOLUCIÓN

Movimiento vertical

$$v_{oy} = 45 \text{ sen } 30^o = 22.5 \text{ m/seg}$$

$$y = 0.50 + 22.5t - 4.9t^2$$

$$0.50 + 22.5t - 4.9t^2 = y$$

$$-0.1 - 4.5t + t^2 = \frac{y}{-4.9} \qquad \text{Al dividir entre} -4.9$$

$$t^2 - 4.5t + (2.25)^2 = -\frac{y}{4.9} + 0.1 + (2.25)^2$$

$$(t - 2.25)^2 = -\frac{1}{4.9}(y - 25.31)$$

Esto significa que la pelota alcanza su máxima altura de 25.3 m en 2.25 seg, o lo que es lo mismo, en 2.25 seg pierde toda su velocidad vertical.

Movimiento horizontal

$$v_x = 45 \cos 30^o = 38.97$$

$$x = (38.97 \text{ m/seg})(4.52 \text{ seg}) = 176.14 \text{ m}$$

Observa que el tiempo es el doble de 2.25 seg.

EJERCICIO 1

Dada la ecuación $x^2 - 8x - 10y - 4 = 0$, transfórmala a su forma ordinaria, encuentra sus elementos y grafícala.

Ejercicio 2

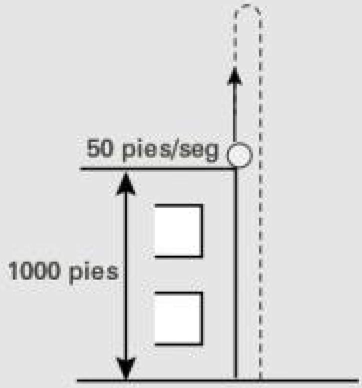
Dada la ecuación $x^2 = 8x - 8y$, transfórmala a su forma ordinaria, encuentra sus elementos y grafícala.

Ejercicio 3

Dada la ecuación $y^2 - 5x + 10y + 10 = 0$, encuentra el foco, el vértice, la ecuación de su directriz y el lado recto, y grafícala.

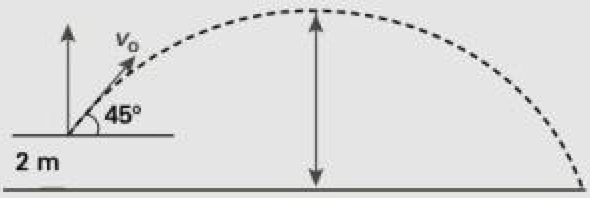
EJERCICIO 4

Si se arroja un objeto hacia arriba desde una altura inicial de 1000 pies con una velocidad de 50 pies por segundo, encuentra la altura máxima y el tiempo para alcanzar dicho punto.



EJERCICIO 5

Una batería de emplazamiento mar-aire dispara un misil que sale de la boca del cañón situado a 2 m de altura del agua, con una velocidad inicial de 100 m/seg y un ángulo de 45°. ¿En cuánto tiempo alcanza el misil su máxima altura? ¿Cuál es el alcance horizontal del misil?



UNIDAD

5

CÓNICAS Y ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO

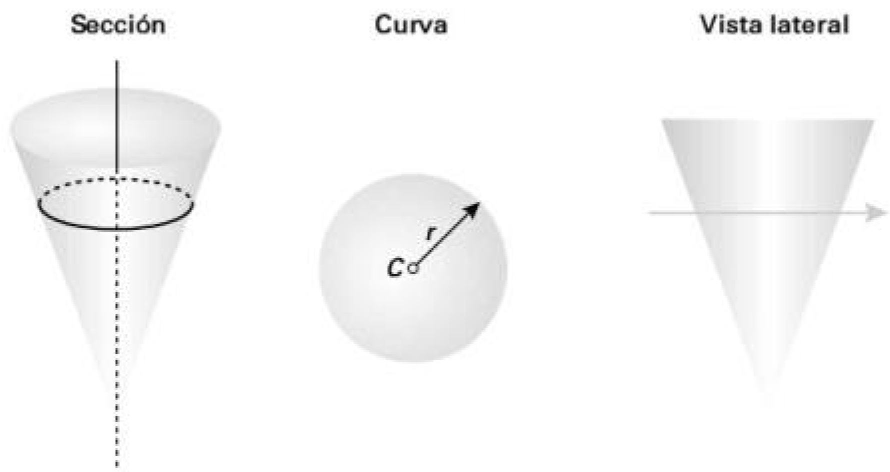
SECCIONES CÓNICAS Y ECUACIONES CUADRÁTICAS

Las secciones cónicas reciben este nombre porque se originan cuando un plano corta a un cono circular.

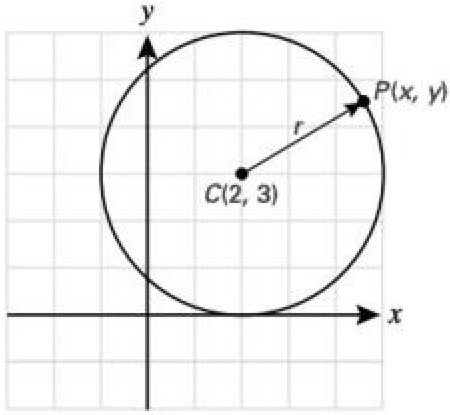
Las secciones que resultan son: *la circunferencia, la parábola, la elipse y la hipérbola*

CIRCUNFERENCIA

La cónica es una *circunferencia* si su distancia a un punto fijo se mantiene siempre igual.



EJEMPLO 1 Escribir la ecuación de la circunferencia de centro $C(2, 3)$ y radio $r = 3$.



SOLUCIÓN

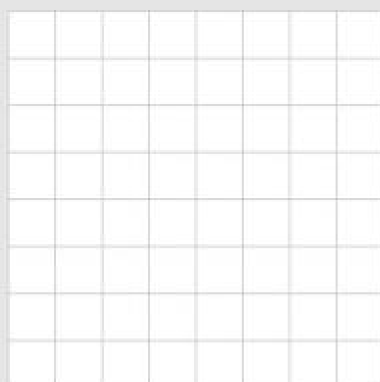
Para cualquier punto $P(x, y)$ de la circunferencia, se cumple que $|PC|^2 = r^2$

$$(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = (3)^2$$

$$x^2 + y^2 - 4x - 6y + 4 = 0$$

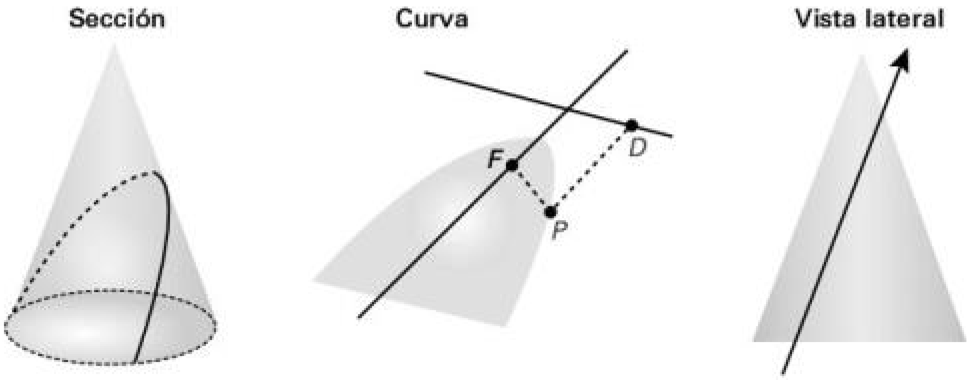
EJERCICIO 1

Halla la ecuación de la circunferencia con centro en $C(-3, 5)$ y radio $r = 2$.



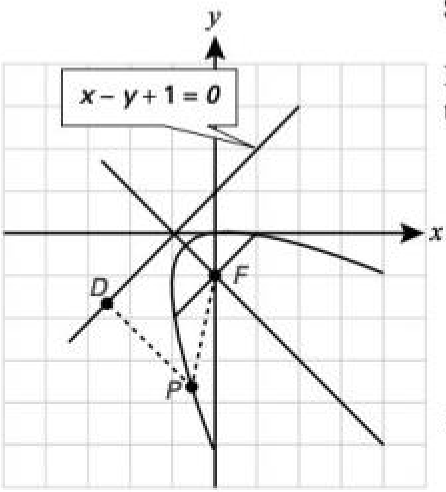
PARÁBOLA

La distancia del foco a un punto es igual a la distancia del punto a una recta fija, $|FP| = |PD|$.



EJEMPLO

Hallar la ecuación de la parábola con foco $F(0, -1)$ y cuya directriz es la recta $x - y + 1 = 0$.



SOLUCIÓN

Por definición, cualquier punto de la parábola tiene la misma distancia al foco y a la directriz, $|PD| = |PF|$.

$$\left|\frac{x-y-1}{-\sqrt{2}}\right| = \sqrt{(x-0)^2 + (y+1)^2}$$

$$x - y - 1 = \sqrt{2}\sqrt{x^2 + y^2 + 2y + 1}$$

$$x^2 - 2xy + y^2 - 2x + 2y + 1 = 2x^2 + 2y^2 + 4y + 2$$

$$x^2 + 2xy + y^2 + 2x + 2y + 1 = 0$$

EJERCICIO 1

Encuentra la ecuación de la parábola con foco $(0,2)$ y cuya directriz es la recta $y = -2$.

EJERCICIO 2

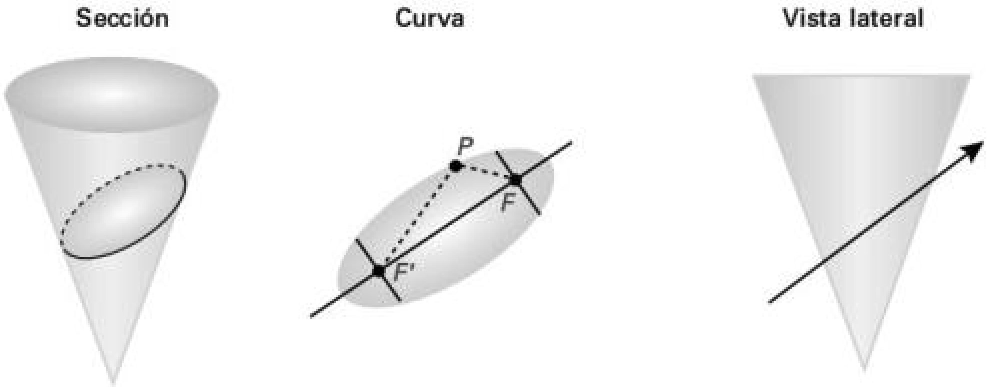
Encuentra la ecuación de la parábola con foco $(0,0)$ y cuya directriz es la recta $x + y - 2 = 0$.

Ejercicio 3

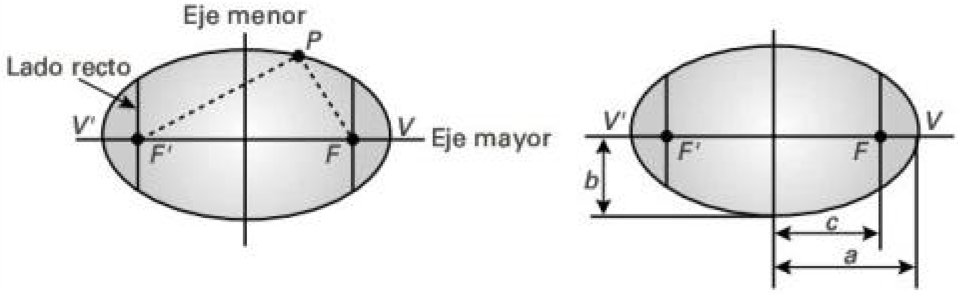
Encuentra la ecuación de la parábola con foco $(2, 2)$ y cuya directriz es la recta $x + y + 2 = 0$.

ELIPSE

La suma de las distancias a dos puntos fijos es siempre la misma, $|F'P| + |FP| =$ *constante.*



ELEMENTOS DE LA ELIPSE



V y V' son los vértices.
F y F' son los focos.
P es un punto cualquiera de la elipse.

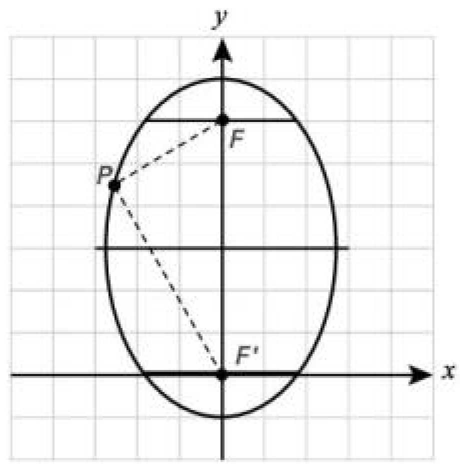
$VV' = 2a$ es la longitud del eje mayor.
$FF' = 2c$ es la distancia focal.
$2b$ es la longitud del eje menor.

RELACIONES ENTRE LOS ELEMENTOS DE LA ELIPSE

$$a^2 = b^2 + c^2 \quad \text{Lado recto} = \left|\frac{2b^2}{a}\right| \quad \text{Excentricidad} = e = \frac{c}{a}$$

EJEMPLO 1

Hallar la ecuación de la elipse cuyos focos son los puntos $F(0,0)$ y $F(0,6)$, y la suma constante de distancias es 8.



SOLUCIÓN

Para cualquier punto de la elipse, se debe cumplir que $|PF| + |PF'| = 6.$

$$\sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2} + \sqrt{(x-0)^2 (y-6)^2} = 8$$
$$\left(\sqrt{x^2 + (y-6)^2}\right)^2 = \left(8 - \sqrt{x^2 + y^2}\right)^2$$

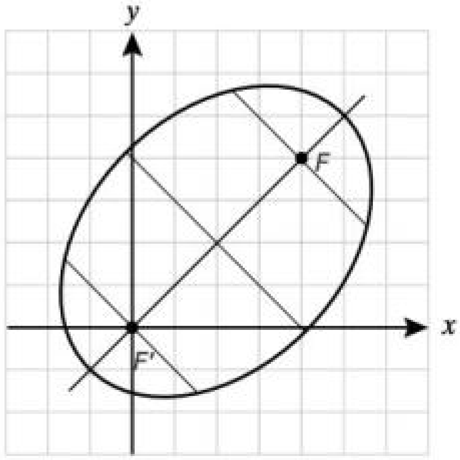
Al desarrollar y simplificar la igualdad anterior, la ecuación buscada es

$$16x^2 + 7y^2 - 42y - 49 = 0.$$

Obtenemos la gráfica a partir de que $a = 4, c = 3 \Rightarrow b = \sqrt{16-9} = \sqrt{7}$ y el lado recto $\left|\frac{2(\sqrt{7})^2}{4}\right| = 3.5.$

Por lo tanto, trazamos perpendicularmente al eje focal dos rectas de 3.5 unidades que pasen por los focos y una de $2\sqrt{7}$ que pase por el centro, es decir, la longitud del eje menor; finalmente, dibujamos la curva con todos estos elementos.

EJEMPLO 2 Halla la ecuación de la elipse cuyos focos son los puntos $F(0, 0)$ y $F'(4, 4)$ y la suma constante de distancias es 6.



SOLUCIÓN

Para cualquier punto de la elipse, se debe cumplir que $|PF| + |PF'| = 6$.

$$\sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2} + \sqrt{(x-4)^2 + (y-4)^2} = 6$$

Al desarrollar y simplificar la expresión anterior, tenemos que la ecuación de la elipse buscada es

$$5x^2 + 5y^2 - 8xy - 4x - 4y - 1 = 0.$$

Para trazar la gráfica, giramos 45° los ejes de la elipse y enseguida calculamos los valores de a, b y c, es decir,

$$c = 2 \quad \text{y} \quad 2a = 6 \Rightarrow a = 3; \quad \text{por lo tanto,} \quad b = \sqrt{(3)^2 - (2)^2} = \sqrt{5}$$

$$\text{y el lado recto es:} \quad \frac{2\left(\sqrt{5}\right)^2}{3} = 3.33.$$

Tracemos, perpendicularmente al eje focal por el centro y los focos, el eje menor y los lados rectos respectivamente para, enseguida, dibujar la elipse.

EJERCICIO 1

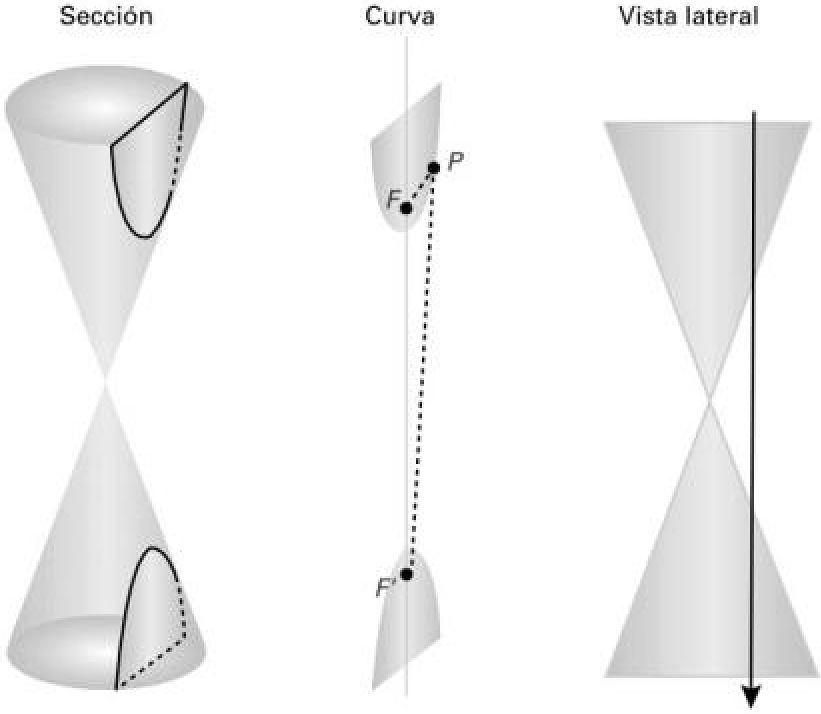
Halla la ecuación de la elipse con focos $F(0,3)$ y $F'(0,-3)$ y distancia constante igual a 8.

EJERCICIO 2

Halla la ecuación de la elipse con focos $F(-3,-1)$ y $F'(3,-3)$ y distancia constante igual a 8.

HIPÉRBOLA

La diferencia de las distancias a dos puntos fijos, llamados focos, es constante, $|PF| - |PF'| = constante.$



ELEMENTOS DE LA HIPÉRBOLA

F y F' son los focos.

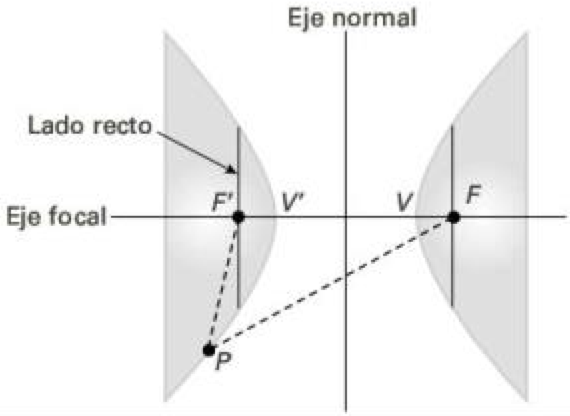
V y V' son los vértices.

P es un punto cualquiera de la hipérbola.

$FF' = 2c$ y es la distancia focal.

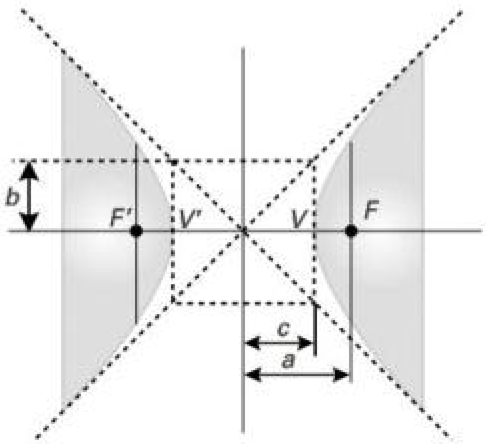
$VV' = 2a$ y se llama eje transverso.

$2b$ es el eje conjugado.

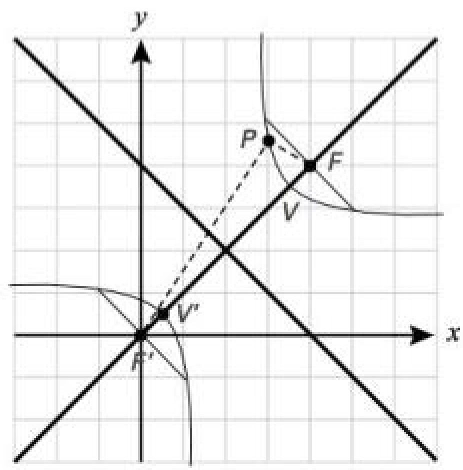


RELACIONES ENTRE ELEMENTOS DE LA HIPÉRBOLA

$$c^2 = a^2 + b^2, \text{lado recto} = \left|\frac{2b^2}{a}\right|, \text{excentricidad} = e = \frac{c}{a}.$$



EJEMPLO 1 Encontrar la ecuación de la hipérbola que tiene por focos $F(4, 4)$ y $F'(0, 0)$, y cuya diferencia constante de distancia es 3.



SOLUCIÓN

Para cualquier punto $P(x, y)$ de la hipérbola: $|PF| - |PF'| = 3$.

$$\sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2} - \sqrt{(x-4)^2 + (y-4)^2} = 3$$

$$\left(\sqrt{(x-4)^2 + (y-4)^2}\right)^2 = \left(3 - \sqrt{x^2 + y^2}\right)^2$$

Al elevar al cuadrado y resolver tenemos la ecuación:

$$28x^2 + 28y^2 - 368x - 368y + 128xy + 529 = 0.$$

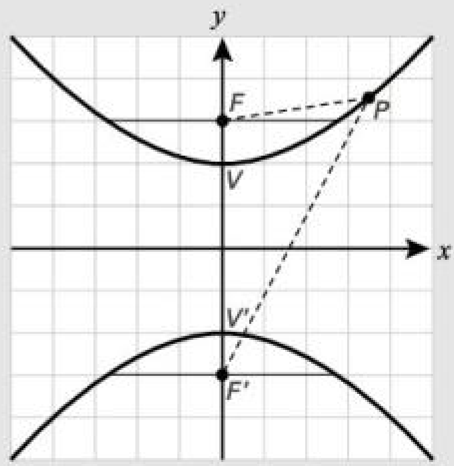
Si consideramos la diagonal de un cuadro como la unidad, entonces

$$c = 2, 2a = 3, b = \sqrt{4 - 2.25} = 1.75, \text{lado recto} = \frac{2(1.75)}{1.5} = 2.33.$$

Por último, usamos estos datos y las coordenadas de los focos para graficar.

Ejercicio 1

Halla la ecuación de la hipérbola con focos $F(0, 3)$ y $F'(0, -3)$, y distancia constante igua a 6.



EJERCICIO 2

Halla la ecuación de la hipérbola con focos $F(4, 0)$ y $F'(-4, 0)$, y distancia constante igual a 4.

EJERCICIO 3

Halla la ecuación de la hipérbola con focos $F(-2, 4)$ y $F'(-2,\ -2)$, y distancia constante igual a 2.

ECUACIÓN GENERAL DE SEGUNDO GRADO

Consideremos ahora las ecuaciones de la forma:

$$Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0$$

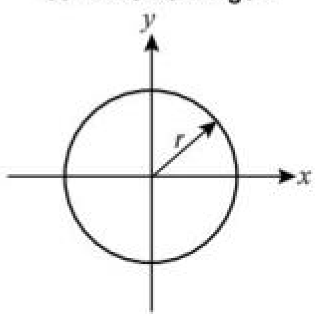
Donde A, B, C, D y E son constantes, y A y B no son ambas igual a 0. La gráfica de una ecuación de este tipo es, en general, una cónica. Se dice "en general" porque, por ejemplo, la gráfica de $x^2 + y^2 = 0$ es sólo un punto (0, 0) y tampoco hay coordenadas (x, y) que satisfagan la ecuación $x^2 + y^2 + 1 = 0$.

En esta sección, trataremos de identificar de forma breve, la cónica a partir de su forma general y, por supuesto, la reduciremos a su forma estándar.

La ecuación $Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0$ es un *círculo* si $A = B$.

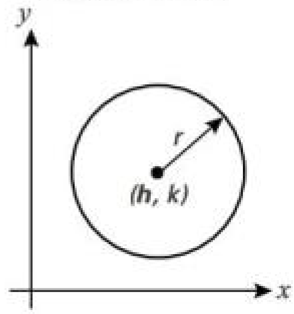
FORMA ESTÁNDAR

Centro en el origen



$x^2 y^2 = r^2$

Centro en (h, k)

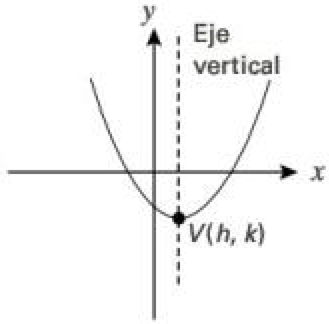


$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$

La ecuación $Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0$ es una *parábola* si $A = 0$ o $B = 0$. Esto es, $By^2 + Cx + Dy + E = 0$, si su eje es horizontal; y $Ax^2 + Cx + Dy + E = 0$, si su eje es vertical.

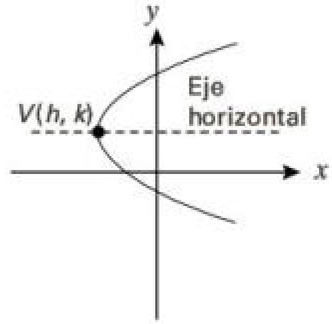
FORMA ESTÁNDAR

Vértice (h, k) y eje vertical



$$(x - h)^2 = 4p(y - k)$$

Vértice (h, k) y eje horizontal

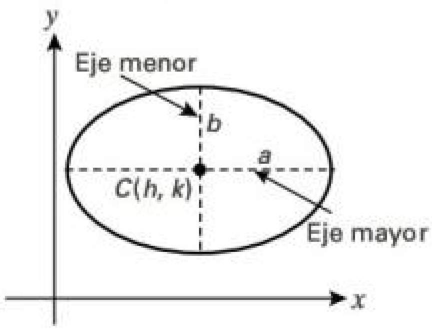


$$(y - k)^2 = 4p(x - h)$$

Si A y B tienen el mismo signo, pero $A \neq B$, la ecuación $Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0$ es una *elipse*.

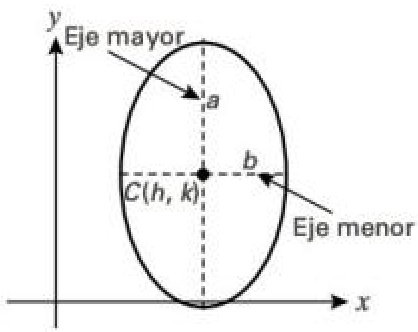
FORMA ESTÁNDAR

Centro en $C(h, k)$
y eje mayor horizontal



$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

Centro en $C(h, k)$
y eje mayor vertical

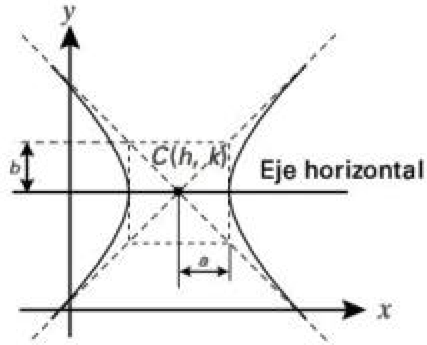


$$\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$$

Cuando A y B tienen signos contrarios, entonces $Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0$ es una *hipérbola.*

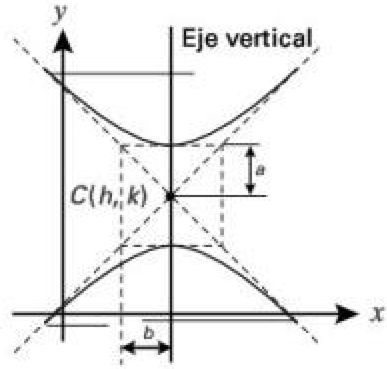
FORMA ESTÁNDAR

Centro en $C(h, k)$ y eje horizontal



$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

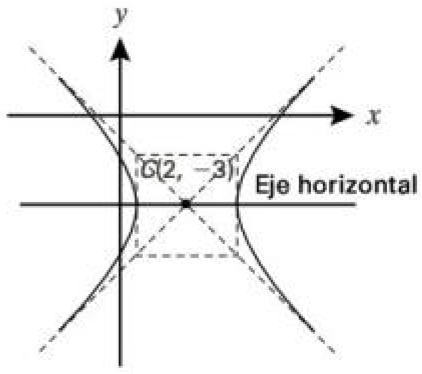
Centro en $C(h, k)$ y eje vertical



$$\frac{(x-k)^2}{b^2} - \frac{(y-h)^2}{a^2} = 1$$

EJEMPLO 1

Consideremos la hipérbola: La forma general $Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0$ se obtiene desarrollando las formas estándares y simplicando las fracciones.



$$\frac{(x-2)^2}{16} - \frac{(y+3)^2}{4} = 1$$

SOLUCIÓN

Al multiplicar entre 16 esta forma, tenemos

$$(x-2)^2 - 4(y+3)^2 = 16,$$

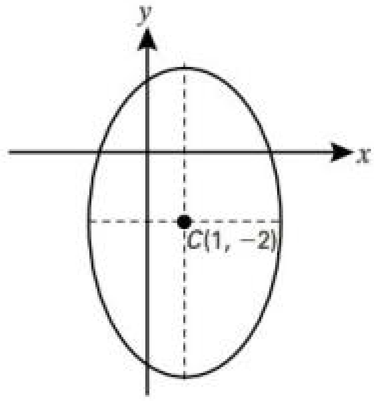
de la cual se obtiene la forma general:

$$x^2 - 4y^2 - 4x - 24y - 48 = 0.$$

Cuando conocemos la forma general de una cónica, las formas estándares se obtienen completando el cuadrado a partir de la ecuación

$$Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0.$$

EJEMPLO 2 Identificar la cónica $9x^2 + 4y^2 - 18x + 16y - 11 = 0$, escribirla en su forma estándar y graficarla.



SOLUCIÓN

Como $A = 9$ y $B = 4$ tienen el mismo signo y son diferentes, la cónica parece ser una elipse.

Si agrupamos los términos en x y en y, tenemos

$$9x^2 - 18x + 4y^2 + 16y - 11 = 0.$$

Al factorizar y completar los cuadrados, resulta:

$$9(x^2 - 2x + 1^2) + 4(y^2 + 4y + 2^2) = 11 + 9 + 16,$$

la cual simplificamos:

$$9(x^2 - 2x + 1^2) + 4(y^2 + 4y + 2^2) = 36$$

La forma estándar la obtenemos factorizando y dividiendo entre 36.

$$\frac{(x-1)^2}{4} + \frac{(y+2)^2}{9} = 1$$

La cónica es una elipse con centro en $C(1, -2)$ y eje mayor vertical.

En los ejercicios 1-4, identifica el género de la cónica de cada ecuación y traza la gráfica.

Ejercicio 1

$y^2 + 2y - x = 0.$

Ejercicio 2

$25x^2 + 9y^2 - 225 = 0.$

Ejercicio 3

$y^2 - 4y - 4x^2 + 8x = 4.$

Ejercicio 4

$x^2 + y^2 - 4x + 6y - 3 = 0.$

Cuando las cónicas son oblicuas —es decir, que su eje principal tiene cierto ángulo de inclinación— pudimos identificar que, al desarrollar sus ecuaciones, se presentan de la siguiente manera:

$$\boldsymbol{Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0}$$

En algunos casos esta ecuación de segundo grado representa una

Elipse, si $\boldsymbol{B^2 - 4AC < 0}$.

Parábola, si $\boldsymbol{B^2 - 4AC = 0}$.

Hipérbola, si $\boldsymbol{B^2 - 4AC > 0}$.

El término $\boldsymbol{B^2 - 4AC}$ se llama indicador o discriminante, y se representa por la letra **I**.

EJEMPLO 3 ¿Qué tipo de curva representa cada una de las siguientes ecuaciones?

a) $3x^2 - 2xy + 3y^2 - 10x - 10y - 25 = 0$

b) $x^2 - 2xy + y^2 + 34x + 36y + 84 = 0$

c) $13x^2 - 70xy - 11y^2 - 22x - 46y - 359 = 0$

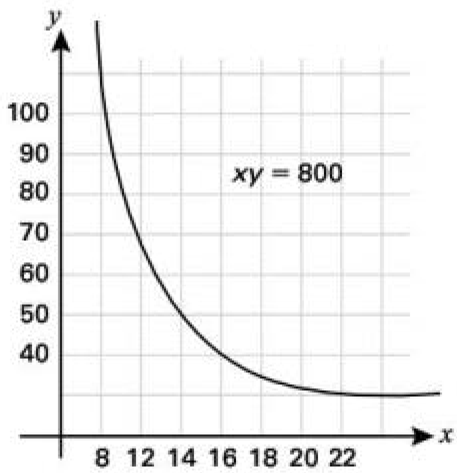
SOLUCIÓN

a) $A = 3, B = -2, C = 3$, por lo tanto, $\boldsymbol{B^2 - 4AC} = (-2)^2 - 4(3)(3) = -32 < 0$. Se trata de una elipse.

b) $A = 1, B = -2, C = 1$, por lo tanto, $\boldsymbol{B^2 - 4AC} = (-2)^2 - 4(1)(1) = 0$. Se trata de una parábola.

c) $A = 13, B = -70, C = -11$, por lo tanto, $\boldsymbol{B^2 - 4AC} = (-70)^2 - 4(13)(-11) = 5472 > 0$. Se trata de una hipérbola.

EJEMPLO 4 Fuera del cuerpo humano, el virus del SIDA es frágil y comienza a morir a los 8 minutos. La tabla mostrada relaciona el porcentaje y de este virus que sobrevive al cabo de x minutos en un ambiente no favorable. Asimismo, la relación $xy = 800$ describe el comportamiento de la disminución del virus.



a) ¿Qué curva representa la relación?
b) ¿Cómo es la relación entre $x - y$?

x(min)	8	10	12	14	16
y(%)	100	70	60	45	40

SOLUCIÓN

a) Una hipérbola: $\boldsymbol{B}^2 - 4\boldsymbol{AC} = (1)^2 - 4(0)(0) > 0.$
b) Es una relación inversa: cuando aumenta el tiempo, el porcentaje disminuye.

Identifica, en los ejercicios 5 al 7, el género de la cónica en cada ecuación sin graficar.

Ejercicio 5

$3x^2 + 4xy - y^2 + 2x - 6y + 8 = 0.$

Ejercicio 6

$25x^2 + 9y^2 - 225 = 0.$

Ejercicio 7

$4x^2 + y^2 - 8 + 4y + 4 = 0.$

Hay quienes afirman que las matemáticas dejan de ser algo complicado si se les relaciona con los objetos que nos rodean; esto ocurre sobre todo cuando nos introducimos en el terreno de la geometría, cuyo significado original fue "medida de la Tierra".

En la presente edición de *Geometría analítica* los estudiantes encontrarán un texto especialmente pensado y diseñado para ellos: manejable, claro, conciso y completo. Gracias a sus numerosos ejemplos y ejercicios, el paso de la teoría a la práctica les parecerá sencillo y natural. En sus páginas aprenderán todo lo que puede ofrecerles un curso de bachillerato en el orden óptimo para su comprensión.

ISBN 970-26-0709-4
90000
9 789702 607090

PEARSON Educación®